



UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PATAGONIA SAN JUAN BOSCO

Facultad de Ingeniería

Departamento de Matemática

Tesis de grado (MA092)

Propiedades de continuidad para operadores fuertemente singulares

Ignacio Viltes

Director:

Dra. Gladis G. Pradolini
FIQ (UNL) - CONICET

Co-Director:

Dr. Fabio M. Berra
FIQ (UNL) - CONICET

Co-Director:

Dr. Gabriel R. Soto
FCNyCS (UNPSJB)

Tribunal Examinador:

Dr. Sebastián J. Vidal
FI (UNPSJB)

Dra. María de Gracia Mendonça
FCNyCS (UNPSJB)

Mg. Bernardo G. Marqués
FI (UNPSJB)

Comodoro Rivadavia, Argentina - 20 de marzo de 2025

*A mis padres, Ariel y Patricia,
y a la memoria del Prof. Luis E. Rybier.*

Agradecimientos

Deseo expresar mi sincero agradecimiento a todos aquellos que me acompañaron durante el proceso de elaboración de esta monografía.

A Gladis y Fabio, por haber aceptado dirigir este trabajo a pesar de la distancia. Su orientación ha sido invaluable, y valoro profundamente todo lo aprendido en este proceso.

A Gabriel, por mantener siempre la puerta de su oficina abierta para escucharme y por ayudarnos a resolver juntos las dudas que fueron surgiendo en el camino.

A Chiqui y Miryan, por su constante orientación y disposición para responder todas mis inquietudes (que no fueron pocas) en el ámbito administrativo.

A Camila, por su motivación y acompañamiento en los momentos más exigentes de este proceso.

Resumen

Los operadores fuertemente singulares han sido considerados por diversos autores. Entre ellos, destacan los trabajos de I. I. Hirschman [16], S. Wainger [26], C. Fefferman y E. M. Stein [11], y S. Chanillo en [2]. Estos operadores se caracterizan por poseer un núcleo con una singularidad más pronunciada en la diagonal de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $\Delta = \{(x, x) : x \in \mathbb{R}^n\}$, en comparación con los correspondientes a los operadores de Calderón-Zygmund (OCZs). Esta particularidad afecta sus propiedades de regularidad y los sitúa fuera del alcance de la teoría clásica.

En [2], S. Chanillo desarrolla la teoría $L^p(w)$ para estos operadores, con w en la clase de pesos A_p de B. Muckenhoupt [19]. El enfoque adoptado se basa en la función maximal *sharp* introducida en [11]. Por otra parte, en [11], C. Fefferman y E. M. Stein demuestran que los operadores fuertemente singulares mapean L^∞ en BMO (véase también [28] y [8] para resultados en contextos más generales). Sin embargo, se desconocen resultados similares con pesos para este extremo, siendo esta teoría bien conocida para OCZs.

Siguiendo los lineamientos de S. Chanillo, en esta tesina desarrollamos detalladamente la acotación en $L^p(w)$ con $1 < p < \infty$ para operadores fuertemente singulares. Posteriormente, exploramos un criterio de suficiencia para la acotación con pesos de L^∞ en BMO , considerando como espacio de llegada el introducido por B. Muckenhoupt y R. L. Wheeden en [20]. Hasta donde se sabe, este resultado no es conocido en la teoría clásica.

Palabras clave: operador fuertemente singular, núcleo fuertemente singular, pesos, BMO , operadores maximales.

Índice general

Agradecimientos	II
Resumen	III
Introducción	1
1. Preliminares	3
1.1. Algunos resultados geométricos en \mathbb{R}^n	3
1.2. Elementos de la teoría de espacios $L^p(\mathbb{R}^n)$	6
1.3. Espacios $L^{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$ y desigualdades de tipo fuerte y débil (p, q)	9
1.4. Operadores maximales y sus propiedades	11
1.5. Selección de operadores integrales singulares	16
1.6. Interpolación de familias analíticas de operadores	19
1.7. Desigualdades con pesos	20
2. Operadores fuertemente singulares	24
2.1. Definición y propiedades	24
2.2. Algunas estimaciones útiles	30
3. Operadores fuertemente singulares en $L^p(w)$, con $1 < p < \infty$ y $w \in A_p$	36
3.1. Demostración del Teorema 3.3	44
3.1.1. Demostración de Lema 3.6	48
4. Acotación L^∞ en BMO con pesos para operadores fuertemente singulares	57
4.1. Un resultado de suficiencia para los operadores fuertemente singulares $K_a * f$ y T_a	57

Resultados, discusión y conclusiones	64
Referencias bibliográficas	65
Índice alfabético	68

Introducción

El estudio de las propiedades de continuidad de ciertos operadores integrales singulares constituye un pilar fundamental del Análisis Armónico, con importantes aplicaciones en diversas áreas de la matemática, como la teoría de ecuaciones en derivadas parciales (EDPs), la teoría de operadores y el análisis complejo en varias variables, entre otras. En este contexto, el término *operador integral singular de convolución* se utiliza para describir formalmente aplicaciones de la forma

$$f(x) \longmapsto \int_{\mathbb{R}^n} K(x-y) f(y) dy = T(f),$$

donde el núcleo K presenta singularidades únicamente en el origen y en el infinito. Por su parte, la función f debe ser, al menos inicialmente, lo suficientemente regular para asegurar la convergencia de la integral, ya sea en el sentido del valor principal o mediante algún otro método apropiado.

El problema central, entonces, consiste en estimar el “tamaño” de Tf en términos del “tamaño” de f sobre distintos espacios funcionales, como, por ejemplo, los clásicos L^p . De este modo, las desigualdades que se buscan suelen tener la forma

$$\|Tf\|_{L^q} \leq C\|f\|_{L^p}, \quad \forall f \in L^p(\mathbb{R}^n).$$

Uno de los enfoques predominantes para este propósito se sustenta en los *métodos de variables reales* introducidos por A. P. Calderón y A. Zygmund en su influyente artículo de la década de 1950, [1]. Estas técnicas fueron extendidas por destacados autores, tales como L. Hörmander en [17] y R. R. Coifman e Y. Meyer en [3], [4] y [5], lo que dio origen a la concepción moderna de *operadores de Calderón-Zygmund* (OCZs). Sin embargo, existen operadores cuya acotación en L^p reviste gran interés, pero quedan fuera del alcance de este marco teórico. Este es el caso de los *operadores fuertemente singulares*, que surgen en el estudio de la convergencia en norma L^p de las series múltiples de Fourier, y que son objeto de estudio en esta monografía.

El ejemplo paradigmático de esta clase de operadores está dado por

$$T_a f(x) = \left(\frac{e^{i|\xi|^\alpha}}{|\xi|^{\frac{n\alpha}{2}}} \theta(\xi) \right)^\sim * f(x),$$

donde $0 < a < 1$ y $\theta \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ es una función de corte estándar. Estos operadores fueron objeto de estudio de diversos autores de renombre. En el caso periódico, G. H. Hardy y J. E. Littlewood los analizaron, al igual que A. Zygmund en [27] e I. I. Hirschman en [16]. Para valores de x cercanos al origen, S. Wainger en [26] ha demostrado que

$$\left(\frac{e^{i|\xi|^\alpha}}{|\xi|^{\frac{n\alpha}{2}}} \theta(\xi) \right)^\sim(x) \approx \frac{e^{i\gamma|x|^{-a'}}}{|x|^n},$$

siendo $a' = \frac{a}{1-a}$ y $\gamma = a^{a'} - a^{1+a'}$. Debido a las rápidas oscilaciones de su núcleo en este rango, este operador no pertenece a la clase de Calderón-Zygmund, ya que no satisface la condición de regularidad

$$|K(x-y) - K(x)| \leq C \frac{|y|}{|x|^{n+1}}, \quad |x| > 2|y|.$$

A pesar de ello, se ha comprobado que T_a presenta propiedades de continuidad análogas a estos operadores. La acotación en L^p para $1 < p < \infty$ fue establecida por I. I. Hirschman en [16] para el caso unidimensional y por S. Wainger en [26] para dimensiones mayores. Por otro lado, el primer trabajo en el que T_a aparece como objeto principal de estudio es [10], donde C. Fefferman también establece que es de tipo débil $(1, 1)$, esto es, la desigualdad

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : |T_a f(x)| > \lambda\}| \leq \frac{C}{\lambda} \|f\|_{L^1},$$

se satisface para todo $\lambda > 0$, donde $|\cdot|$ denota la medida de Lebesgue en \mathbb{R}^n .

La teoría $L^p(w)$ para operadores fuertemente singulares con pesos en A_p , clase introducida por B. Muckenhoupt en [19], fue desarrollada por S. Chanillo en [2], quien presentó sus argumentos para $n = 1$ y esbozó el caso general como una serie de observaciones. Su enfoque se basa en la utilización de la función maximal *sharp*, definida en [11]. El primer objetivo de esta tesina será el estudio exhaustivo del artículo [2], con el fin de adquirir los conocimientos y herramientas necesarios para la comprensión de esta teoría. Por otra parte, en [11] se probó que los operadores fuertemente singulares mapean L^∞ en BMO . Sin embargo, hasta donde sabemos, no se conocen resultados similares con pesos para $p = \infty$, siendo esta teoría bien conocida para OCZs. Utilizando las nociones adquiridas en la primera parte, se intentará resolver el problema $L^\infty - BMO$ con pesos y analizar los parámetros involucrados. Para comprender y desarrollar estos conceptos, fue necesario un estudio previo de la teoría clásica de Análisis Armónico, el cual se llevó a cabo en el seminario de posgrado “*Tópicos de Análisis Armónico y Aplicaciones a Desigualdades Mixtas*”, como parte de la asignatura “*Optativa I (MA095)*”.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo presentaremos los conceptos y definiciones necesarios para la comprensión de esta tesina. La mayoría de estos resultados son bien conocidos y fueron estudiados en las asignaturas “*Teoría de la Medida (MA068)*”, “*Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales (MA070)*” y en el seminario de posgrado “*Tópicos de Análisis Armónico y Aplicaciones a Desigualdades Mixtas*”, como parte de la asignatura “*Optativa I (MA095)*”. En la Sección 1.1 abordaremos algunos aspectos topológicos del espacio euclídeo \mathbb{R}^n , cuyas demostraciones ilustrarán el enfoque adoptado a lo largo de este trabajo. En las Secciones 1.2 y 1.3 recopilaremos definiciones y resultados fundamentales de análisis real, las demostraciones omitidas podrán consultarse en [12] o [22]. En las Secciones 1.4, 1.5 y 1.6, enunciaremos algunos resultados relacionados con las propiedades de continuidad de ciertos operadores clásicos del análisis armónico. Finalmente, en la Sección 1.7, introduciremos las clases de pesos que se considerarán, junto con sus propiedades elementales.

1.1. Algunos resultados geométricos en \mathbb{R}^n

En general, trabajaremos en el espacio euclídeo n -dimensional \mathbb{R}^n . Para $x \in \mathbb{R}^n$, denotaremos por $|x|$ su norma euclídea y su norma infinito por $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$.

Si $x \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$, la ***bola euclídea*** con centro x y radio r se define como

$$B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : |x - y| < r\}.$$

En algunos casos, será más conveniente trabajar con ***cubos*** en lugar de bolas. A lo largo de esta monografía, consideraremos cubos Q abiertos con lados paralelos a los ejes coordenados y longitud $l(Q)$,

es decir,

$$Q = \prod_{i=1}^n (a_i, b_i), \quad a_i < b_i, \quad l(Q) = b_i - a_i, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Para $\lambda > 0$, definimos λQ como el cubo concéntrico con Q y tal que $l(\lambda Q) = \lambda l(Q)$.

El siguiente resultado nos permitirá trabajar indistintamente con bolas o cubos.

Proposición 1.1. Sean $r > 0$ y Q_r el cubo centrado en $x \in \mathbb{R}^n$ con $l(Q_r) = 2r$. Entonces, vale la siguiente cadena de contenciones

$$B(x, r) \subseteq Q_r \subseteq B(x, \sqrt{nr}). \quad (1.1)$$

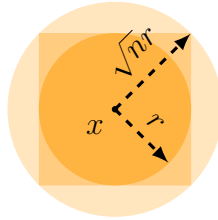


Figura 1.1: Ilustración de la relación (1.1) en el plano \mathbb{R}^2 .

Demostración. Probemos que $B(x, r) \subseteq Q_r = \{y \in \mathbb{R}^n : \|x - y\|_\infty < r\}$. Si $y \in B(x, r)$, entonces

$$|x_i - y_i|^2 < \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2 = |x - y|^2 < r^2, \quad 1 \leq i \leq n.$$

En consecuencia, $\max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i| = \|x - y\|_\infty < r$.

Ahora, veamos que $Q_r \subseteq B(x, \sqrt{nr})$. Si $y \in Q_r$, se cumple

$$|x - y|^2 = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2 < n \|x - y\|_\infty^2 < nr^2.$$

Por lo tanto, $|x - y| < \sqrt{nr}$. □

A continuación, presentamos un resultado técnico que facilitará la comparación entre distancias asociadas a cubos y sus dilataciones.

Proposición 1.2. Sean $\lambda > 1$ y Q un cubo centrado en $x \in \mathbb{R}^n$. Entonces, existe una constante $C = C(n, \lambda) \geq 1$ tal que la desigualdad

$$C^{-1}|y - z| \leq |x - z| \leq C|y - z| \quad (1.2)$$

vale para todo $y \in Q$ y $z \in \mathbb{R}^n \setminus \lambda Q$.

Demostración. Sean $y \in Q$ y $z \in \mathbb{R}^n \setminus \lambda Q$. Para la estimación izquierda, aplicando la desigualdad triangular y el hecho de que $|x - y| < \frac{\sqrt{n}}{2}l(Q)$ en virtud de la Proposición 1.1, se tiene que

$$|y - z| \leq |y - x| + |x - z| \leq \frac{\sqrt{n}}{2}l(Q) + |x - z| = \left(\frac{\sqrt{n}}{2|x - z|}l(Q) + 1 \right) |x - z|.$$

Dado que $x \in Q$ y $z \in \mathbb{R}^n \setminus \lambda Q$, entonces

$$|x - z| \geq \text{dist}(\partial Q, \partial(\lambda Q)) = \frac{\lambda - 1}{2}l(Q). \quad (1.3)$$

Sustituyendo esta cota en la desigualdad anterior, obtenemos

$$|y - z| \leq \left(\frac{\sqrt{n}}{\lambda - 1} + 1 \right) |x - z|.$$

Para la estimación restante, considerando que (1.3) también se verifica para $y \in Q$, obtenemos

$$|x - z| \leq \left(\frac{\sqrt{n}}{2|y - z|}l(Q) + 1 \right) |y - z| \leq \left(\frac{\sqrt{n}}{\lambda - 1} + 1 \right) |y - z|.$$

Definiendo $C = \frac{\sqrt{n}}{\lambda - 1} + 1$ se concluye la demostración de (1.2). □

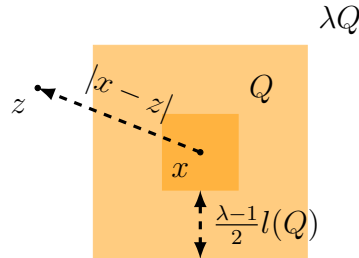


Figura 1.2: Ilustración de la relación (1.3) en el plano \mathbb{R}^2 .

A partir de ahora, denotaremos por C una constante positiva que podrá variar en las apariciones subsecuentes, incluso dentro de una misma cadena de desigualdades. En este contexto, introducimos la siguiente notación: sean $f, g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ funciones medibles. Escribiremos $f \lesssim g$ para indicar que existe una constante positiva C tal que la desigualdad $|f(x)| \leq C|g(x)|$ vale para todo x en el dominio de f y g . Si $f \lesssim g$ y $g \lesssim f$, utilizaremos la notación $f \approx g$.

Ejemplo 1.3. Si $x \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$, la notación recién introducida es especialmente útil para describir **anillos** centrados en x , como se ilustra a continuación

$$A = \{y \in \mathbb{R}^n : \alpha r \leq |x - y| \leq \beta r\} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - y| \approx r\}, \quad 0 < \alpha < \beta.$$

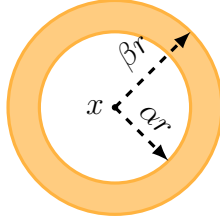


Figura 1.3: Ilustración del anillo A en el plano \mathbb{R}^2 .

1.2. Elementos de la teoría de espacios $L^p(\mathbb{R}^n)$

Dado $E \subseteq \mathbb{R}^n$, denotaremos con ∂E su frontera, con $|E|$ su medida de Lebesgue y con χ_E su función característica,

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in E; \\ 0 & \text{si } x \notin E. \end{cases}$$

Si una propiedad se verifica para todo punto $x \in E$ excepto en algún subconjunto de medida cero, diremos que la propiedad vale en casi todo punto $x \in E$ (c.t.p. $x \in E$).

Si $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ es un multiíndice y $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$, definimos la derivada de orden α de f como la función

$$D^\alpha f(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial^{\alpha_1} x_1 \dots \partial^{\alpha_n} x_n}(x),$$

donde $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ y $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} + \dots + x_n^{\alpha_n}$.

Dado $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$, denotaremos con $C^k(\mathbb{R}^n)$, o simplemente C^k , al conjunto de las funciones $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ tales que $D^\alpha f$ existe y es continua para todo multiíndice $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ con $|\alpha| \leq k$. Asimismo, denotaremos con $C_c^k(\mathbb{R}^n)$, o C_c^k , al conjunto de funciones de la clase $C^k(\mathbb{R}^n)$ que tienen soporte compacto.

Para $1 \leq p < \infty$, el **espacio** $L^p(\mathbb{R}^n)$, o simplemente L^p , es el espacio de Banach compuesto por las funciones medibles $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ que satisfacen

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

En el caso límite $p = \infty$, el **espacio** $L^\infty(\mathbb{R}^n)$, o simplemente L^∞ , se define como el espacio de Banach formado por las funciones medibles $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ que son esencialmente acotadas, es decir, aquellas que verifican

$$\|f\|_{L^\infty} = \inf \{M > 0 : |\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > M\}| = 0\} < \infty.$$

Decimos que dos funciones $f, g \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$, son iguales si $f(x) = g(x)$ en c.t.p. x .

Dado $1 < p < \infty$, denominamos exponente conjugado de p al número p' determinado por la relación

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Por convención, si $p = 1$, entonces $p' = \infty$, y viceversa. En el caso $0 < a < 1$, definimos a' mediante la expresión

$$a' = \frac{a}{1-a}.$$

A continuación, enunciamos la clásica **desigualdad de Hölder**, que garantiza que el producto de una función en L^p y otra en $L^{p'}$ es siempre una función integrable.

Teorema 1.4 (Desigualdad de Hölder). *Sean $1 \leq p \leq \infty$, $f \in L^p$ y $g \in L^{p'}$. Entonces, $fg \in L^1$ y vale la desigualdad*

$$\|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^{p'}}.$$

Otro importante resultado es la **desigualdad de Jensen**, cuya prueba puede consultarse en [22].

Teorema 1.5 (Desigualdad de Jensen). *Sean $\phi: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ una función convexa y $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto medible tal que $0 < |E| < \infty$. Entonces, la desigualdad*

$$\phi\left(\frac{1}{|E|} \int_E |f(x)| dx\right) \leq \frac{1}{|E|} \int_E \phi(|f(x)|) dx$$

vale para toda $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ medible con $f\chi_E \in L^1$.

Presentamos a continuación algunos resultados básicos de convergencia, los cuales también son válidos en contextos más generales (véase, por ejemplo, [22]). En nuestro caso, nos limitaremos a medidas de la forma $d\mu(x) = w(x) dx$, donde w es una función no negativa en c.t.p. que cumple ciertas condiciones que enunciaremos más adelante.

Teorema 1.6. *El espacio $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ es denso en $L^p(\mathbb{R}^n)$.*

Teorema 1.7 (Lema de Fatou). *Sea $\{f_j\}_j$ una sucesión de funciones $f_j: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty)$ medibles. Entonces,*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \liminf_{j \rightarrow \infty} f_j(x) dx \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_j(x) dx.$$

Teorema 1.8 (Teorema de la convergencia dominada). *Sea $\{f_j\}_j \subseteq L^1(\mathbb{R}^n)$ tal que*

(a) $f(x) = \lim_{j \rightarrow \infty} f_j(x)$ en c.t.p. x ,

(b) Existe una función no negativa $g \in L^1$ tal que, para todo j , se cumple la desigualdad $|f_j(x)| \leq g(x)$ en c.t.p. x .

Entonces, $f \in L^1$ y

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_j(x) dx.$$

Dadas $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, definimos su **convolución** en c.t.p. x como la función

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y)g(y) dy.$$

El siguiente resultado reúne propiedades básicas de la convolución que se deducen directamente de su definición (véase, por ejemplo, [12]).

Proposición 1.9. Sean f, g y $h \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Entonces, se verifican las siguientes propiedades

(a) $f * g = g * f$,

(b) $(f * g) * h = f * (g * h)$,

(c) Si $z \in \mathbb{R}^n$ y $\tau_z f(x) = f(x + z)$, entonces $\tau_z(f * g) = (\tau_z f) * g = f * (\tau_z g)$, y

(d) Si A es la clausura de $\{x + y : x \in \text{sop } f, y \in \text{sop } g\}$, entonces $\text{sop } f * g \subseteq A$.

Enunciamos a continuación la **desigualdad de Young**, un resultado clásico que proporciona condiciones para la existencia de $f * g(x)$ en c.t.p. $x \in \mathbb{R}^n$ cuando f o g pertenecen a L^p .

Teorema 1.10 (Desigualdad de Young). Sean $1 \leq p \leq \infty$, $f \in L^1$ y $g \in L^p$. Entonces, $f * g \in L^p$ y vale la desigualdad

$$\|f * g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^p}.$$

El siguiente teorema, conocido como la propiedad suavizadora de la convolución, se deduce del **teorema de la convergencia dominada**.

Teorema 1.11. Sean $f \in L^1$ y $g \in C^k$ tal que $D^\alpha g \in L^\infty$ para todo $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ con $|\alpha| \leq k$. Entonces, $f * g \in C^k$ y $D^\alpha(f * g) = f * (D^\alpha g)$ para todo $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ con $|\alpha| \leq k$.

Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, en esta tesina adoptaremos la siguiente definición para la *transformada de Fourier* de f ,

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ix\xi} dx.$$

A continuación, presentamos algunas propiedades elementales de la transformada de Fourier.

Proposición 1.12. Sean $\lambda \in \mathbb{C}$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ y $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Entonces, se verifican las siguientes propiedades en c.t.p. ξ

(a) $(\lambda f + g)\hat{\ }(\xi) = \lambda\hat{f}(\xi) + \hat{g}(\xi),$

(b) $(f * g)\hat{\ }(\xi) = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi),$

(c) $(D^\alpha f)\hat{\ }(\xi) = (i\xi)^\alpha \hat{f}(\xi),$

(d) $D^\alpha \hat{f}(\xi) = [(-ix)^\alpha f(x)]\hat{\ }(\xi),$ y

(e) $\hat{f} \in L^\infty$ y vale la desigualdad $\|\hat{f}\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^1},$

El siguiente teorema describe el comportamiento de la transformada de Fourier en el espacio L^2 .

Teorema 1.13. La transformada de Fourier es una isometría en L^2 . Esto es, $\hat{f} \in L^2$ y $\|f\|_{L^2} = \|\hat{f}\|_{L^2}.$

1.3. Espacios $L^{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$ y desigualdades de tipo fuerte y débil (p, q)

La *función de distribución* de una función medible $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ está dada por

$$d_f(\lambda) = |\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \lambda\}|, \quad 0 < \lambda < \infty.$$

Notemos que, por definición, d_f proporciona información sobre el “tamaño” de f , aunque no sobre su comportamiento local en torno a puntos específicos.

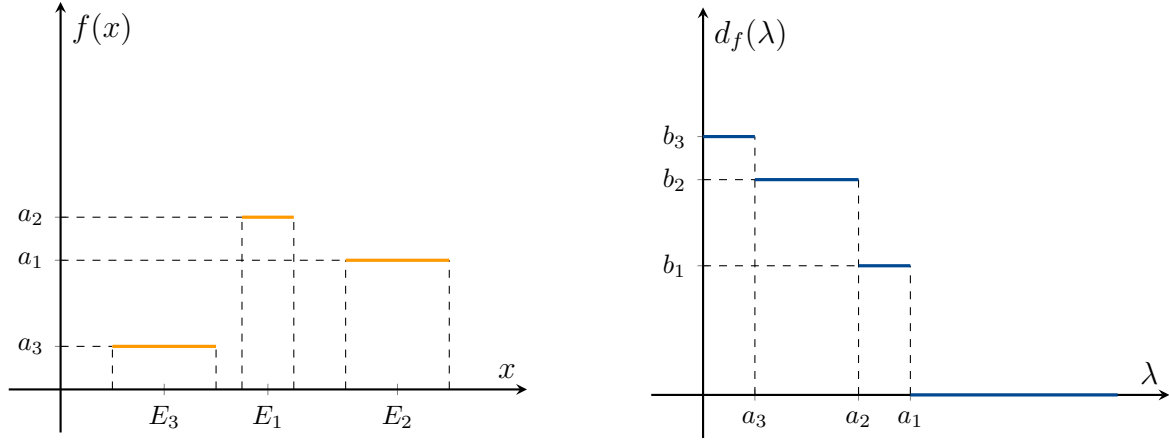


Figura 1.4: Ilustración de la función simple $f(x) = \sum_{j=1}^3 a_j \chi_{E_j}(x)$ y su función de distribución d_f en el plano \mathbb{R}^2 . Aquí, $b_k = \sum_{j=1}^k |E_j|$.

Dado $1 \leq p < \infty$, el **espacio** $L^{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$, o simplemente $L^{p,\infty}$, se define como el conjunto de funciones medibles $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ que satisfacen

$$\|f\|_{L^{p,\infty}} = \left(\sup_{\lambda > 0} \lambda^p d_f(\lambda) \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Por definición, $L^{\infty,\infty}(\mathbb{R}^n) = L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Observación 1.14. Es importante destacar que esta función no define propiamente una norma, ya que no se cumple la desigualdad triangular. Sin embargo, los espacios $L^{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$ son lineales, cuasi-normados y completos (véase, por ejemplo, [14]).

La **desigualdad de Chebyshev** es un resultado clásico del análisis real que establece una relación entre los espacios L^p y $L^{p,\infty}$.

Teorema 1.15 (Desigualdad de Chebyshev). *Sean $1 \leq p < \infty$ y $f \in L^p$. Entonces, $f \in L^{p,\infty}$ y vale la desigualdad*

$$\|f\|_{L^{p,\infty}} \leq \|f\|_{L^p}.$$

Ejemplo 1.16. La inclusión $L^{p,\infty}(\mathbb{R}^n) \subseteq L^p(\mathbb{R}^n)$ es estricta. Sea $f(x) = x^{-\frac{n}{p}}$. Mediante un cambio de coordenadas, se tiene

$$\|f\|_{L^p}^p = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|x|^n} dx \approx \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty}} \int_{\varepsilon}^N \frac{1}{r} dr = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty}} \log(r)|_{\varepsilon}^N.$$

Por lo tanto, $f \notin L^p(\mathbb{R}^n)$. Ahora bien, a partir de la definición de d_f , resulta

$$d_f(\lambda) = \left| \left\{ x \in \mathbb{R}^n : |x|^{-\frac{n}{p}} > \lambda \right\} \right| = \left| \left\{ x \in \mathbb{R}^n : |x|^{\frac{n}{p}} < \frac{1}{\lambda} \right\} \right| = \left| \left\{ x \in \mathbb{R}^n : |x| < \frac{1}{\lambda^{\frac{p}{n}}} \right\} \right|.$$

Si $\lambda > 0$ y $E \subseteq \mathbb{R}^n$ es un conjunto de Borel, entonces $|\lambda E| = \lambda^n |E|$. De este modo,

$$d_f(\lambda) = \frac{1}{\lambda^p} |B(0, 1)|.$$

En consecuencia, $f \in L^{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$.

Sea T una aplicación definida en un espacio vectorial \mathcal{V} de funciones medibles $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$, cuyo rango está contenido en el espacio de todas las funciones medibles de \mathbb{R}^n a \mathbb{C} . Denotamos la acción de T sobre f como Tf , y decimos que T es un **operador sublineal** si verifica las siguientes propiedades

$$|T(f + g)| \leq |Tf| + |Tg| \quad \text{y} \quad |T(\lambda f)| = |\lambda| |Tf|,$$

para todo par de funciones $f, g \in \mathcal{V}$ y todo $\lambda \in \mathbb{C}$.

Sean $1 \leq p, q \leq \infty$ y T un operador sublineal definido en $L^p(\mathbb{R}^n)$. Decimos que T es de **tipo fuerte** (p, q) si existe una constante positiva $C = C(p, q)$ tal que la desigualdad

$$\|Tf\|_{L^q} \leq C \|f\|_{L^p}$$

vale para toda $f \in L^p$. En este caso, también decimos que T está acotado de L^p en L^q , o que T es una aplicación continua de L^p en L^q .

Si $1 \leq q < \infty$, decimos que T es de **tipo débil** (p, q) si está acotado de L^p en $L^{q,\infty}$. Esto es, si existe una constante positiva $C = C(p, q)$ tal que, para toda $f \in L^p$, se cumple la desigualdad

$$\|Tf\|_{L^{q,\infty}} \leq C \|f\|_{L^p}.$$

De forma equivalente, esta condición puede expresarse como

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : |Tf(x)| > \lambda\}| \leq \left(\frac{C}{\lambda^p} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{q}{p}},$$

para todo $\lambda > 0$ y toda $f \in L^p$.

Observación 1.17. Como consecuencia de la **Desigualdad de Chebyshev**, si T es un operador de tipo fuerte (p, q) , entonces también es de tipo débil (p, q) .

1.4. Operadores maximales y sus propiedades

Decimos que una función medible $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ es **localmente integrable** si, para todo conjunto compacto $K \subseteq \mathbb{R}^n$, se cumple que

$$\int_K |f(x)| dx < \infty.$$

El **espacio** $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, o simplemente L^1_{loc} , está formado por todas las funciones medibles $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ que son localmente integrables.

Enunciamos a continuación el **teorema de diferenciación de Lebesgue**, que extiende una propiedad bien conocida de las funciones continuas y está estrechamente relacionado con los operadores que se tratarán en este apartado. Una demostración de este clásico resultado puede encontrarse en [12].

Teorema 1.18 (Teorema de diferenciación de Lebesgue). *Sea $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Entonces, se tiene la siguiente igualdad en c.t.p. x*

$$f(x) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{|Q_r|} \int_{Q_r} f(y) dy,$$

donde Q_r es un cubo centrado en x con $l(Q_r) = \frac{2r}{\sqrt{n}}$.

Para $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, el **operador maximal de Hardy-Littlewood** se define mediante la expresión

$$Mf(x) = \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)| dy,$$

donde el supremo se toma sobre todos los cubos Q que contienen a x .

Observación 1.19. En la literatura, se encuentran diversas definiciones de este operador, ya sea reemplazando los cubos por bolas o considerando versiones centradas en el punto x . Sin embargo, como consecuencia de las Proposiciones 1.1 y 1.2, todas estas definiciones son puntualmente equivalentes.

Ejemplo 1.20. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$, $f(x) = \chi_{[a,b]}(x)$ y $Q \ni x$. Por definición,

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)| dy = \frac{|Q \cap [a, b]|}{|Q|}.$$

Si $a < x < b$, el promedio de $|f|$ sobre Q es igual a 1 cuando $Q \subseteq [a, b]$, y menor que 1 si $Q \cap [a, b] \subsetneq Q$. Por otro lado, si $x \leq a$ o $x \geq b$, el intervalo que maximiza el promedio de $|f|$ sobre Q es $Q = [x, b]$ si $x \leq a$, y $Q = [a, x]$ si $x \geq b$.

En consecuencia,

$$Mf(x) = \begin{cases} \frac{b-a}{|x-b|} & \text{si } x \leq a, \\ 1 & \text{si } a < x < b, \\ \frac{b-a}{|x-a|} & \text{si } x \geq b. \end{cases}$$

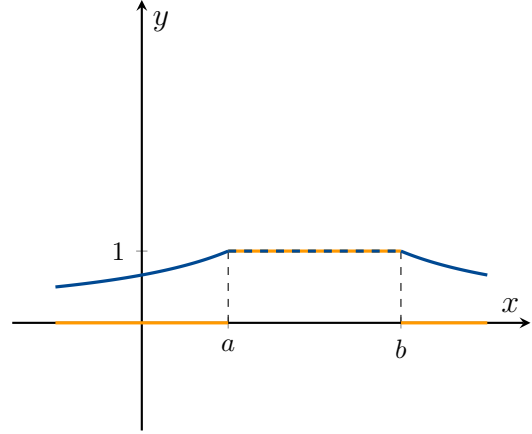


Figura 1.5: Representación gráfica de las funciones $f(\sim)$ y $Mf(\sim)$ en el plano \mathbb{R}^2 .

El siguiente resultado reúne algunas propiedades puntuales del operador maximal de Hardy-Littlewood.

Proposición 1.21. Sean $\lambda \in \mathbb{C}$ y $f, g \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Entonces, se verifican las siguientes propiedades en c.t.p. x

- (a) $|f(x)| \leq Mf(x)$,
- (b) $M(\lambda f)(x) = |\lambda| Mf(x)$, y
- (c) $M(f + g)(x) \leq Mf(x) + Mg(x)$.

Demostración. Comencemos con la demostración del inciso (a). Por el [teorema de diferenciación de Lebesgue](#), se cumple la siguiente igualdad en c.t.p. x

$$f(x) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{|Q_r|} \int_{Q_r} f(y) dy,$$

donde Q_r es un cubo centrado en x con $l(Q_r) = \frac{2r}{\sqrt{n}}$. Por lo tanto,

$$|f(x)| \leq \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{|Q_r|} \int_{Q_r} |f(y)| dy \leq \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)| dy = Mf(x).$$

La demostración del inciso (b) se sigue de forma directa a partir de la definición del operador y de la linealidad de la integral de Lebesgue.

Por último, aplicando la desigualdad triangular, se tiene que

$$M(f + g)(x) = \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y) + g(y)| dy$$

$$\leq \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|} \left(\int_Q |f(y)| dy + \int_Q |g(y)| dy \right) = Mf(x) + Mg(x).$$

Esto concluye la demostración del inciso (c) y, en consecuencia, de la proposición. \square

Las propiedades (b) y (c) establecen la sublinealidad del operador maximal de Hardy-Littlewood. Por su parte, la propiedad (a) indica que Mf controla puntualmente a f , lo que nos permite demostrar que

$$\|f\|_{L^\infty} = \|Mf\|_{L^\infty}.$$

Además, a partir de la definición del operador se deduce que, si $f \in L^1$ y no es idénticamente nula, entonces $Mf \notin L^1$ (véase, por ejemplo, [9], *Proposition 2.14*).

Seguidamente, presentamos las propiedades de acotación de este operador maximal en los espacios clásicos L^p . La demostración de este resultado puede consultarse, entre otras fuentes, en [9].

Teorema 1.22. *El operador M es de tipo débil $(1, 1)$ y de tipo fuerte (p, p) para $1 < p \leq \infty$.*

Si $1 \leq s < \infty$, una variante del operador maximal de Hardy-Littlewood es el **operador maximal M_s** , definido por

$$M_s f(x) = (M(|f|^s)(x))^{\frac{1}{s}} = \left(\sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)|^s dy \right)^{\frac{1}{s}}. \quad (1.4)$$

En virtud del Teorema 1.22, este operador es de tipo fuerte (p, p) para $r < p < \infty$.

El siguiente resultado establece una relación puntual entre los operadores maximales M y M_s .

Proposición 1.23. *Sean $1 \leq r < \infty$ y $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Entonces, se tiene la siguiente desigualdad en c.t.p. x*

$$Mf(x) \leq M_s f(x).$$

Demostración. Sean $x \in \mathbb{R}^n$ y $Q \ni x$. Dado que $1 \leq s < \infty$, aplicando la **desigualdad de Jensen**, se tiene que

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)| dy \right)^r \leq \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)|^r dy.$$

Elevando ambos lados a la potencia $\frac{1}{s}$ y tomando el supremo sobre todos los cubos que contienen a x ,

$$Mf(x) = \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)| dy \leq \left(\sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)|^r dy \right)^{\frac{1}{r}} = M_s f(x). \quad \square$$

Sea $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Denotamos por f_Q el promedio de f sobre un cubo Q , es decir,

$$f_Q = \frac{1}{|Q|} \int_Q f(y) dy,$$

y definimos el *operador maximal “sharp”* como

$$M^\# f(x) = \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y) - f_Q| dy. \quad (1.5)$$

Por definición, cada una de estas integrales mide la oscilación media de f sobre Q . El *espacio BMO*, que corresponde a la abreviatura del término en inglés *Bounded Mean Oscillation*, está compuesto por todas las funciones $f \in L^1_{\text{loc}}$ que tienen oscilación media acotada, es decir, aquellas que verifican

$$\|f\|_{BMO} = \|M^\# f\|_{L^\infty} < \infty.$$

Observación 1.24. Es importante aclarar que esta función no define una norma en el sentido estricto, ya que las funciones constantes en c.t.p. tienen oscilación media nula. Sin embargo, tales funciones son las únicas que poseen esta propiedad (véase, por ejemplo, [15], *Proposition 3.1.2*). Por esta razón, decimos que dos funciones $f, g \in BMO$ son iguales si difieren en una constante.

El siguiente resultado establece una relación puntual entre los operadores maximales M y $M^\#$.

Proposición 1.25. *Sea $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Entonces, se tiene la siguiente desigualdad en c.t.p. x*

$$M^\# f(x) \leq 2Mf(x).$$

Demostración. Sean $x \in \mathbb{R}^n$ y $Q \ni x$. Aplicando la desigualdad triangular, se tiene que

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y) - f_Q| dy \leq \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)| dy + \left| \frac{1}{|Q|} \int_Q f(y) dy \right| \leq \frac{2}{|Q|} \int_Q |f(y)| dy.$$

Tomando el supremo sobre todos los cubos que contienen a x ,

$$M^\# f(x) = \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y) - f_Q| dy \leq 2 \left(\sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)| dy \right) = 2Mf(x). \quad \square$$

A continuación, presentamos una caracterización alternativa de $\|\cdot\|_{BMO}$ que evita el uso de promedios.

Proposición 1.26. *Sea $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Entonces, se verifica la siguiente equivalencia entre normas*

$$\frac{1}{2} \|f\|_{BMO} \leq \sup_Q \inf_{\lambda \in \mathbb{C}} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x) - \lambda| dx \leq \|f\|_{BMO}.$$

Demostración. La estimación de la derecha se obtiene de forma directa al escoger $\lambda = f_Q$. Por otro lado, aplicando la desigualdad triangular, se tiene que

$$\int_Q |f(x) - f_Q| dx \leq \int_Q |f(x) - \lambda| dx + \int_Q |\lambda - f_Q| dx \leq 2 \int_Q |f(x) - \lambda| dx,$$

para todo $\lambda \in \mathbb{C}$. Dividiendo ambos miembros por $2|Q|$, tomando el ínfimo sobre λ y el supremo sobre todos los cubos,

$$\frac{1}{2} \|f\|_{BMO} \leq \sup_Q \inf_{\lambda \in \mathbb{C}} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x) - \lambda| dx. \quad \square$$

Observación 1.27. De forma análoga a lo indicado en la Observación 1.19, las versiones de los operadores maximales M_s y $M^\#$ definidas utilizando bolas en lugar de cubos o centradas en el punto $x \in \mathbb{R}^n$ son puntualmente equivalentes.

1.5. Selección de operadores integrales singulares

Decimos que una función $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ pertenece a la *clase \mathcal{S} de Schwartz*, o simplemente que $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, si tanto ella como todas sus derivadas decrecen rápidamente en el infinito, esto es,

$$\rho_{\alpha,\beta}(f) = \|x^\alpha D^\beta f\|_{L^\infty} < \infty$$

para todo par de multiíndices $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$.

La familia de seminormas $\{\rho_{\alpha,\beta}\}_{\alpha,\beta}$ induce una topología en \mathcal{S} . A continuación, presentamos una caracterización de los funcionales lineales y continuos en este espacio (véase, por ejemplo, [18]). Decimos que un funcional lineal $T: \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C}$ es una *distribución temperada*, y lo denotamos por $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, si existen $k, m \in \mathbb{Z}$ y una constante positiva C tales que, para toda $\phi \in \mathcal{S}$, se cumple la desigualdad

$$|\langle T, \phi \rangle| \leq C \sum_{\substack{|\alpha| \leq k \\ |\beta| \leq m}} \rho_{\alpha,\beta}(\phi). \quad (1.6)$$

Ejemplo 1.28. En el campo de la física, encontramos uno de los ejemplos más relevantes para la teoría de distribuciones temperadas: la “función” de impulso o “función” δ de Dirac, introducida históricamente de manera informal mediante la expresión

$$\delta(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si } x = 0, \\ 0 & \text{si } x \neq 0. \end{cases}$$

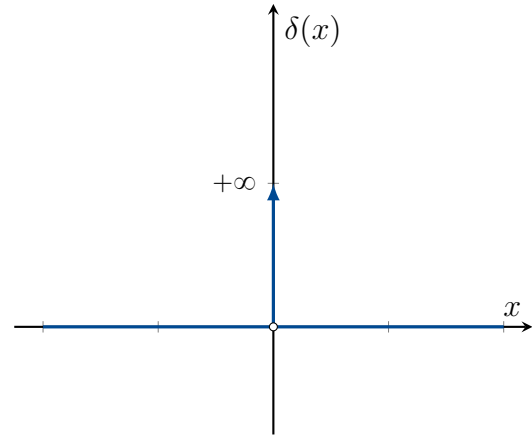


Figura 1.6: Ilustración de la “función” $\delta(\sim)$ en el plano \mathbb{R}^2 .

Este objeto, que durante mucho tiempo fue tratado sin una definición rigurosa, admite una formalización precisa en esta teoría, como se muestra a continuación

$$\langle \delta, \phi \rangle = \phi(0), \quad \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Así definida, δ es una distribución temperada. En efecto, para $\phi, \psi \in \mathcal{S}$ y $\lambda \in \mathbb{C}$, se cumple que

$$\langle \delta, \lambda\phi + \psi \rangle = (\lambda\phi + \psi)(0) = \lambda\phi(0) + \psi(0) = \lambda\langle \delta, \phi \rangle + \langle \delta, \psi \rangle.$$

Luego, la continuidad del funcional se deduce a partir de la caracterización (1.6), ya que

$$|\langle \delta, \phi \rangle| = |\phi(0)| \leq \|\phi\|_{L^\infty}.$$

Cabe señalar que la distribución temperada δ no admite una representación integral. Sin embargo, desde el punto de vista de la teoría de la medida, puede interpretarse como una medida de Radon (véase, por ejemplo, [18]).

Ejemplo 1.29. Otro ejemplo clásico es la distribución temperada valor principal de $\frac{1}{x}$, definida por

$$\left\langle \text{v. p. } \frac{1}{x}, \phi \right\rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\{|x| > \epsilon\}} \frac{\phi(x)}{x} dx, \quad \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

Esta distribución desempeña un papel fundamental en análisis armónico. El lector interesado puede consultar [9] para más detalles.

Dadas $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ y $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, la convolución $T * f$ se define como la distribución temperada

$$\langle T * f, \phi \rangle = \langle T, \tilde{f} * \phi \rangle,$$

donde $\tilde{f}(y) = f(-y)$. Además, se sabe que $T * f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, y está dada por

$$T * f(x) = \langle T, \tau_x \tilde{f} \rangle,$$

siendo $\tau_x f(y) = f(x + y)$ (véase, por ejemplo, [14]).

Observación 1.30. A partir del inciso (c) de la Proposición 1.9, puede probarse que

$$\tau_z(T * f) = T * (\tau_z f), \quad z \in \mathbb{R}^n,$$

es decir, los operadores definidos mediante la convolución de una distribución temperada con una función de Schwartz son invariantes por traslaciones. Para más detalles, el lector interesado puede consultar [14].

La introducción de operaciones en el “sentido de distribuciones temperadas” permite abordar cuestiones que no podrían tratarse en el marco clásico del análisis real. Un ejemplo destacado de ello es el estudio de las propiedades de continuidad de operadores integrales singulares. En este contexto, una aplicación clásica es la **transformada de Hilbert**, definida para $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ por

$$Hf(x) = \text{v. p.} \frac{1}{x} * f(x).$$

Este operador juega un papel central en análisis armónico, pues motivó el desarrollo de la teoría de los **operadores de Calderón-Zygmund** (OCZs). A continuación, presentamos su definición en el sentido moderno impulsado por R. R. Coifman e Y. Meyer en [3], [4], [5].

Sean $\Delta = \{(x, x) : x \in \mathbb{R}^n\}$ la “diagonal” de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ y $T: \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ un operador lineal acotado. Decimos que T es un OCZ si verifica las siguientes condiciones

- (a) T admite una extensión acotada de $L^2(\mathbb{R}^n)$ en sí mismo.
- (b) Existe una función continua $K: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \setminus \Delta \rightarrow \mathbb{C}$ tal que

$$|K(x, y) - K(x, z)| + |K(y, x) - K(z, x)| \leq C \frac{|y - z|^\delta}{|x - z|^{n+\delta}}, \quad \text{si } |x - z| \geq 2|y - z|,$$

para cierta constante $0 < \delta \leq 1$, y

$$\langle Tf, g \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} K(x, y) f(y) g(x) dy dx,$$

para todo par de funciones $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ con soportes disjuntos.

Estas condiciones son suficientes para demostrar que los operadores de Calderón-Zygmund son de tipo fuerte (p, p) para $1 < p < \infty$ y de tipo débil $(1, 1)$. El siguiente teorema es fundamental para establecer la acotación de L^∞ en BMO para esta clase de operadores.

Teorema 1.31. Sean $s \geq 1$ y T un OCZ. Entonces, existe una constante positiva $C = C(n, s, \delta)$ tal que, en c.t.p. x , se cumple la desigualdad

$$M^\#(Tf)(x) \leq CM_s f(x),$$

donde $M^\#$ y M_s son los operadores maximales definidos en (1.5) y (1.4), respectivamente.

Los resultados mencionados son ampliamente conocidos en el campo de análisis armónico y pueden consultarse en diversas fuentes, como [9], [14] y [15], entre otras.

1.6. Interpolación de familias analíticas de operadores

Sean $S = \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1\}$ y $\{T_z\}_{z \in S}$ una familia de operadores lineales definidos en $L^1(\mathbb{R}^n)$. Decimos que $\{T_z\}_{z \in S}$ es una **familia analítica de operadores** si, para todo par de funciones simples $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$, la función

$$z \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} T_z f(x) g(x) dx$$

es holomorfa en el interior de S y continua en su frontera.

Además, decimos que $\{T_z\}_{z \in S}$ tiene **crecimiento admisible** si existen constantes positivas $A < \pi$ y $B = B(f, g)$ tales que, para todo $z \in S$, se cumple la desigualdad

$$e^{-A|\operatorname{Im} z|} \log \left| \int_{\mathbb{R}^n} T_z f(x) g(x) dx \right| \leq B < \infty.$$

Enunciamos un teorema de interpolación debido a E. M. Stein en [25], que extiende el clásico resultado de Riesz-Thorin. Una demostración detallada puede encontrarse en [14].

Teorema 1.32 (Teorema de interpolación de Stein). Sean $1 \leq p_0, p_1, q_0, q_1 \leq \infty$ y $\{T_z\}_{z \in S}$ una familia analítica de operadores de crecimiento admisible. Supongamos que, para todo $v \in \mathbb{R}$ y toda función simple f , se verifican las siguientes desigualdades de tipo fuerte

$$\|T_{iv} f\|_{q_0} \leq M_0(v) \|f\|_{p_0} \quad y \quad \|T_{1+iv} f\|_{q_1} \leq M_1(v) \|f\|_{p_1},$$

donde M_0 y M_1 son funciones a valores reales que satisfacen, para alguna constante $0 < C < \pi$, la condición

$$\sup_{v \in \mathbb{R}} e^{-C|v|} \log M_j(v) < \infty, \quad j = 0, 1. \quad (1.7)$$

Entonces, para $0 < \theta < 1$ y p_θ, q_θ definidos por

$$\frac{1}{p_\theta} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1} \quad \text{y} \quad \frac{1}{q_\theta} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}, \quad (1.8)$$

existe una constante positiva $C = C(\theta, M_0, M_1)$ tal que la desigualdad

$$\|T_\theta f\|_{q_\theta} \leq C \|f\|_{p_\theta}$$

vale para toda $f \in L^{p_\theta}(\mathbb{R}^n)$.

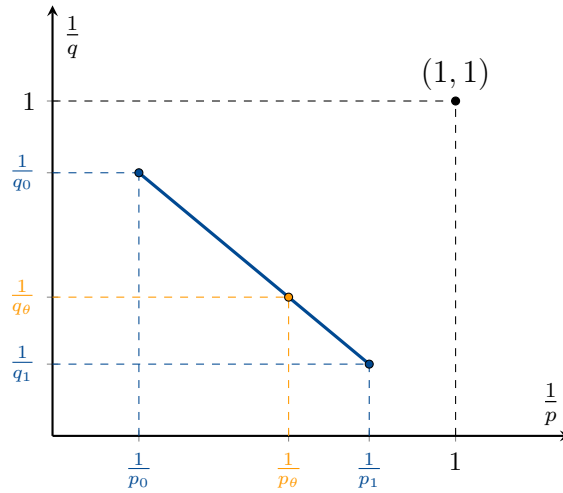


Figura 1.7: Geométricamente, la relación (1.8) indica que los puntos $(\frac{1}{p_\theta}, \frac{1}{q_\theta})$ se encuentran sobre el segmento de recta que conecta los puntos $(\frac{1}{p_0}, \frac{1}{q_0})$ y $(\frac{1}{p_1}, \frac{1}{q_1})$.

1.7. Desigualdades con pesos

En análisis armónico, un **peso** es una función $w \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ que es positiva en casi todo punto. Si w es un peso y $E \subseteq \mathbb{R}^n$ es un conjunto medible, definimos

$$w(E) = \int_E w(x) dx.$$

Dado $1 \leq p < \infty$, el **espacio** $L^p(\mathbb{R}^n, w)$, o simplemente $L^p(w)$, se define como el conjunto de todas las funciones medibles $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ que satisfacen

$$\|f\|_{L^p(w)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p w(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Análogamente, el *espacio* $L^{p,\infty}(\mathbb{R}^n, w)$ o $L^{p,\infty}(w)$ está formado por todas las funciones medibles $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ que cumplen

$$\|f\|_{L^{p,\infty}(w)} = \sup_{\lambda>0} \lambda w(\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \lambda\})^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Es de interés estudiar condiciones sobre los pesos que garanticen que ciertos operadores clásicos estén acotados en $L^p(w)$. Un ejemplo de ello es la *clase de pesos* A_p , introducida por B. Muckenhoupt en [19]. Decimos que un peso w está en A_p , para $1 < p < \infty$, si existe una constante positiva C tal que la desigualdad

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w(x) dx \right) \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w(x)^{1-p'} dx \right)^{p-1} \leq C \quad (1.9)$$

vale para todo cubo Q de \mathbb{R}^n . En particular, decimos que w pertenece a la *clase de pesos* A_1 si existe una constante positiva C tal que, para todo cubo Q de \mathbb{R}^n , se cumple la desigualdad

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q w(x) dx \leq Cw(x) \quad (1.10)$$

para casi todo $x \in Q$. La menor constante para la cual se cumple la condición (1.9) o (1.10) se denomina *constante característica* A_p de w y se denota por $[w]_{A_p}$.

Por último, la *clase de pesos* A_∞ se define como

$$A_\infty = \bigcup_{p \geq 1} A_p.$$

Es bien conocido que $w \in A_\infty$ es equivalente a la existencia de dos constantes positivas C y δ tales que la desigualdad

$$\frac{w(S)}{w(Q)} \leq C \left(\frac{|S|}{|Q|} \right)^\delta$$

vale para todo cubo Q de \mathbb{R}^n y $S \subseteq Q$ medible.

El siguiente resultado resume algunas propiedades de los pesos A_p , las cuales se siguen directamente de su definición (véase, por ejemplo, [14]).

Proposición 1.33. Sean $1 \leq p < \infty$ y $w \in A_p$. Entonces, se verifican las siguientes propiedades

- (a) $[w]_{A_p} \geq 1$,
- (b) Si $p \leq q$, se tiene que $w \in A_q$, y
- (c) Si $\lambda > 1$, entonces, para todo cubo Q de \mathbb{R}^n , se cumple la desigualdad

$$w(\lambda Q) \leq \lambda^{np} [w]_{A_p} w(Q).$$

Presentamos a continuación un teorema de B. Muckenhoupt que motivó el desarrollo de la teoría de pesos A_p . Una demostración de este resultado puede encontrarse, entre otras fuentes, en [9].

Teorema 1.34. *El operador M es de tipo débil $(1, 1)$ con respecto a w si y solo si $w \in A_1$. En particular, existe una constante positiva $C = C(n, [w]_{A_1})$ tal que, para toda $f \in L^1(w)$, se cumple la desigualdad*

$$\|Mf\|_{L^{1,\infty}(w)} \leq C\|f\|_{L^1(w)}.$$

Análogamente, el operador M es de tipo fuerte (p, p) con respecto a w si y solo si $w \in A_p$. Luego, existe una constante positiva $C = C(n, p, [w]_{A_p})$ tal que la desigualdad

$$\|Mf\|_{L^p(w)} \leq C\|f\|_{L^p(w)}$$

vale para toda $f \in L^p(w)$.

El siguiente resultado, atribuido a A. Córdoza y C. Fefferman en [7], establece una relación entre los operadores maximales M y $M^\#$.

Teorema 1.35. *Sean $p_0 \geq 1$ y $w \in A_{p_0}$. Entonces, existe una constante positiva $C = C(n, p_0, [w]_{p_0})$ tal que la desigualdad*

$$\|Mf\|_{L^p(w)} \leq C\|M^\#f\|_{L^p(w)}$$

vale para todo $p_0 \leq p < \infty$ y toda $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ con $Mf \in L^{p_0}(w)$.

Una propiedad fundamental de los pesos A_p se conoce como propiedad de **Hölder al revés**. Dado $s > 1$ decimos que $w \in RH_s$ si existe una constante positiva C tal que, para todo cubo Q de \mathbb{R}^n , se cumple la desigualdad

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w(x)^s dx \right)^{\frac{1}{s}} \leq \frac{C}{|Q|} \int_Q w(x) dx.$$

El término ‘‘Hölder al revés’’ se debe a que la desigualdad en sentido opuesto se deduce directamente de la **desigualdad de Hölder**. Mientras que la clase A_p es creciente en p , la clase RH_s exhibe un comportamiento decreciente en s .

Gracias a esta propiedad, es posible establecer la apertura de la clase A_p , lo que se resume en el siguiente teorema. Las demostraciones pueden encontrarse, por ejemplo, en [14].

Teorema 1.36. *Sean $1 \leq p < \infty$ y $w \in A_p$. Entonces, se verifican las siguientes propiedades*

- (a) Existe $s > 1$ tal que $w \in RH_s$,
- (b) Existe $\delta > 0$ tal que $w^{1+\delta} \in A_p$, y
- (c) Si $p > 1$, existe $\epsilon > 0$ tal que $w \in A_{p-\epsilon}$.

En todos los casos, las constantes involucradas dependen solo de n , p y $[w]_{A_p}$.

Corolario 1.37. Sean $1 < p < \infty$ y $w \in A_p$. Entonces, existen $1 < s_0 < p$ y una constante positiva $C = C(n, p, [w]_{A_p})$ tal que la desigualdad

$$\|M_s f\|_{L^p(w)} \leq C \|f\|_{L^p(w)}$$

vale para todo $1 \leq s \leq s_0$ y toda $f \in L^p(w)$.

Demostración. Dado que $w \in A_p$, por el inciso (c) del Teorema 1.36, existe $\epsilon > 0$ tal que $w \in A_{p-\epsilon}$.

Sea $s = \frac{p}{p-\epsilon}$. Por definición, se tiene que

$$\|M_s f\|_{L^p(w)}^s = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |M(|f|^s)(x)|^{\frac{p}{s}} w(x) dx \right)^{\frac{s}{p}} = \|M(|f|^s)\|_{L^{\frac{p}{s}}(w)}.$$

Considerando que $1 < \frac{p}{s} < \infty$ y $w \in A_{\frac{p}{s}}$, en virtud del Teorema 1.34, obtenemos

$$\|M_s f\|_{L^p(w)}^s = \|M(|f|^s)\|_{L^{\frac{p}{s}}(w)} \leq C \| |f|^s \|_{L^{\frac{p}{s}}(w)} = C \|f\|_{L^p(w)}^s. \quad \square$$

Capítulo 2

Operadores fuertemente singulares

Presentaremos en este capítulo dos operadores de convolución estrechamente relacionados, cuyos núcleos exhiben una singularidad más acentuada en la diagonal de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $\Delta = \{(x, x) : x \in \mathbb{R}^n\}$, en comparación con los correspondientes a los OCZ. Esta característica impacta sus propiedades de regularidad, dejándolos fuera del alcance de la teoría clásica, aunque conservan suficientes características estructurales para manifestar propiedades de continuidad análogas.

2.1. Definición y propiedades

Sean $0 < a < 1$, $a' = \frac{a}{1-a}$ y $\gamma = a^{a'} - a^{1+a'}$. Formalmente, definimos el **núcleo fuertemente singular** K_a como la “función”

$$K_a(x) = \frac{e^{i\gamma|x|^{-a'}}}{|x|^n} \chi\{|x| \leq 1\}(x), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

El siguiente resultado establece que el núcleo K_a presenta una singularidad más pronunciada en la diagonal de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ que los núcleos considerados en la teoría clásica.

Proposición 2.1. Sean $0 < a < 1$ y $a' = \frac{a}{1-a}$. Entonces, existe una constante positiva $C = C(a, n)$ tal que la desigualdad

$$|K_a(x - y) - K_a(x)| \leq C \frac{|y|}{|x|^{(n+1)+a'}}$$

vale para todo $x, y \in \{z \in \mathbb{R}^n : |z| \leq 1\} \setminus \{0\}$ con $|x| \geq 2|y|$ y $|x - y| \leq 1$.

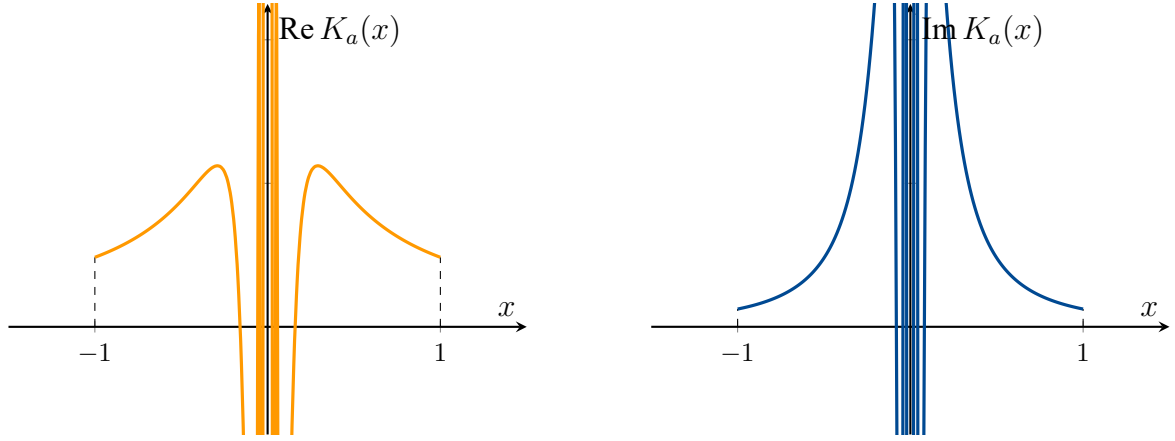


Figura 2.1: Ilustración de las partes real e imaginaria del núcleo K_a en el plano \mathbb{R}^2 .

Demostración. Sean $x, y \in \{z \in \mathbb{R}^n : |z| \leq 1\} \setminus \{0\}$ tales $|x| > 2|y|$ y $|x - y| \leq 1$. Por el teorema del valor medio, se tiene que

$$|K_a(x - y) - K_a(x)| = \left| \frac{e^{i\gamma|x-y|^{-a'}}}{|x-y|^n} - \frac{e^{i\gamma|x|^{-a'}}}{|x|^n} \right| = \left| -e^{i\gamma\xi^{-a'}} \left(\frac{n}{\xi^{n+1}} + \frac{ia'\gamma}{\xi^{(n+1)+a'}} \right) \right| ||x-y| - |x||,$$

donde $\gamma = a^{a'} - a^{1+a'}$, y ξ es un punto intermedio entre $|x|$ y $|x - y|$.

Dependiendo de la posición relativa de x e y , se cumple $|x - y| < |x|$ o $|x| < |x - y|$. En ambos casos, afirmamos que $\frac{|x|}{2} \leq \xi < 1$. Si $|x| < |x - y|$, entonces $\frac{|x|}{2} < |x| < \xi < |x - y| \leq 1$. Por otro lado, si $|x - y| < |x|$, aplicando la desigualdad triangular y utilizando que $|x| \geq 2|y|$, obtenemos

$$|x| = |(x - y) + y| \leq |x - y| + |y| \leq |x - y| + \frac{|x|}{2}. \quad (2.1)$$

Luego, $\frac{|x|}{2} \leq |x - y| < \xi < |x| \leq 1$.

De este modo, considerando que $\xi^{(n+1)+a'} \leq \xi^{n+1}$ y la estimación recién obtenida, resulta

$$\begin{aligned} \left| \frac{n}{\xi^{n+1}} + \frac{ia'\gamma}{\xi^{(n+1)+a'}} \right| ||x-y| - |x|| &\leq \left(\frac{n}{\xi^{n+1}} + \frac{|ia'\gamma|}{\xi^{(n+1)+a'}} \right) ||x| + |y| - |x|| \\ &\leq \frac{|y|}{\xi^{(n+1)+a'}} (n + a'\gamma) \\ &\leq C \frac{|y|}{|x|^{(n+1)+a'}}, \end{aligned}$$

donde $C = 2^{(n+1)+a'} (n + a'\gamma)$ es una constante positiva. \square

Es evidente que $K_a \notin L^1(\mathbb{R}^n)$. Sin embargo, la función K_a define una distribución temperada de soporte compacto, que también se denotará por K_a , a través de la siguiente expresión

$$\langle K_a, \phi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{i\gamma|x|^{-a'}}}{|x|^n} \chi_{\{\varepsilon \leq |x| \leq 1\}}(x) \phi(x) dx.$$

De hecho, al realizar el cambio a coordenadas polares, se tiene que

$$\langle K_a, \phi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^1 \frac{e^{i\gamma r^{-a'}}}{r} \left(\int_{S^{n-1}} \phi(r, \theta) d\theta \right) dr = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^1 \frac{e^{i\gamma r^{-a'}}}{r} \Phi(r) dr,$$

donde $\Phi(r) = \int_{S^{n-1}} \phi(r, \theta) d\theta$ y S^{n-1} es la esfera unitaria en \mathbb{R}^n . Integrando por partes, resulta

$$\begin{aligned} \langle K_a, \phi \rangle &= \frac{i}{\gamma a'} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^1 \left(e^{i\gamma r^{-a'}} \right)' r^{a'} \Phi(r) dr \\ &= \frac{i}{\gamma a'} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(e^{i\gamma r^{-a'}} r^{a'} \Phi(r) \Big|_{\varepsilon}^1 - \int_{\varepsilon}^1 e^{i\gamma r^{-a'}} \left(r^{a'} \Phi'(r) + a' r^{a'-1} \Phi(r) \right) dr \right) \\ &= \frac{i}{\gamma a'} \left(e^i \Phi(1) - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^1 e^{i\gamma r^{-a'}} \left(r^{a'} \Phi'(r) + a' r^{a'-1} \Phi(r) \right) dr \right), \end{aligned} \quad (2.2)$$

donde la última igualdad se obtiene de considerar que $0 < a' < \infty$. Dado que $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ y, en consecuencia, $|\partial^\alpha \Phi(r)| \leq |S^{n-1}| \|\partial^\alpha \phi\|_{L^\infty}$, obtenemos

$$|\langle K_a, \phi \rangle| \leq \frac{|S^{n-1}|}{|\gamma| a'} \left(\|\phi\|_{L^\infty} + \left(\int_0^1 r^{a'} dr \right) \|\phi'\|_{L^\infty} + a' \left(\int_0^1 r^{a'-1} dr \right) \|\phi\|_{L^\infty} \right).$$

Por otro lado, si $\text{sop } \phi \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\}$, entonces $\langle K_a, \phi \rangle = 0$. De este modo,

$$\text{sop } K_{a'} \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\}.$$

Considerando que $\text{sop } K_a$ es, por definición, un conjunto cerrado (al ser intersección de conjuntos cerrados), se concluye que $\text{sop } K_a$ es un conjunto compacto.

En consecuencia, el **operador fuertemente singular** $K_a * f^1$ está bien definido si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Con el objetivo de profundizar en sus propiedades de continuidad, será necesario introducir el segundo operador de este apartado, el cual da origen a esta clase de operadores.

Sean $0 < a < 1$ y $\theta \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ definida por

¹Si bien, de acuerdo con la literatura clásica, definimos el núcleo K_a como una “función”, este se interpretará en el sentido del valor principal, es decir, como distribución cuando $x \in \text{sop } f$

$$\theta(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{si } |\xi| \leq \frac{1}{2}, \\ 1 & \text{si } |\xi| \geq 1. \end{cases}$$

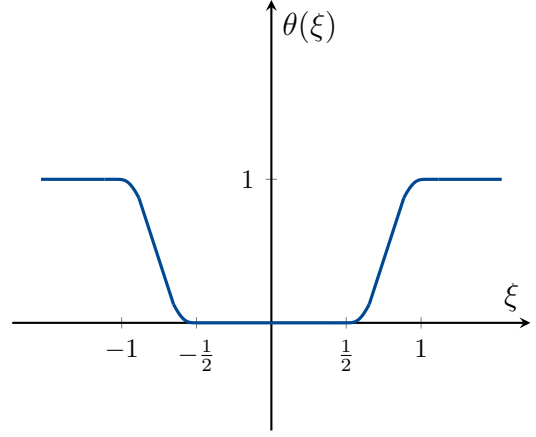


Figura 2.2: Ilustración de la función $\theta(\sim)$ en el plano \mathbb{R}^2 .

Para $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, el **operador “multiplicador”** T_a se define mediante la expresión

$$(T_a f)^\wedge(\xi) = \left(\frac{e^{i|\xi|^a}}{|\xi|^{\frac{na}{2}}} \theta(\xi) \right) \hat{f}(\xi).$$

En virtud del inciso (b) de la Proposición 1.12, consideraremos la siguiente caracterización de T_a , atribuida a S. Wainger en [26],

$$T_a f(x) = \left(\frac{e^{i|x|^a}}{|x|^{\frac{na}{2}}} \theta(x) \right)^\vee * f(x) \approx K_a * f(x) + L_a * f(x), \quad (2.3)$$

donde $L_a \in L^1(\mathbb{R}^n)$ satisface

$$|L_a(x)| \lesssim \frac{1}{(1+|x|)^{n+1}} + \frac{|x|^{a'}}{|x|^n} \chi_{\{|x| \leq 1\}}(x). \quad (2.4)$$

En todos los casos, las constantes involucradas dependen solo de a y n .

Para valores de x cercanos al origen, en virtud de (2.3) es fácil ver que el comportamiento del núcleo de T_a está esencialmente gobernado por K_a . Además, considerando la demostración de la Proposición 2.1, se obtiene la siguiente estimación

$$\left| \nabla \left(\frac{e^{i|x|^a}}{|x|^{\frac{na}{2}}} \theta(x) \right)^\vee(x) \right| \lesssim \frac{1}{|x|^{(n+1)+a'}}, \quad 0 < |x| \leq 1.$$

Por otro lado, de la definición de T_a como multiplicador, se obtiene la cota

$$\left| \frac{e^{i|\xi|^a}}{|\xi|^{\frac{na}{2}}} \theta(\xi) \right| \lesssim \frac{1}{(1+|\xi|)^{\frac{na}{2}}}, \quad \text{c.t.p. } \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Bajo estas condiciones, y teniendo en cuenta la relación $1 = (1-a)(1+a')$, C. Fefferman en [10] establece el siguiente teorema.

Teorema 2.2 (Tipo fuerte (p, p) del operador T_a). *El operador T_a es de tipo débil $(1, 1)$ y de tipo fuerte (p, p) para $1 < p < \infty$.*

Observación 2.3. Cuando $p = \infty$, se sabe que el operador T_a mapea L^∞ en BMO . Este resultado, demostrado por C. Fefferman y E. M. Stein en [11], será retomado más adelante.

El siguiente lema es fundamental en el estudio de estos operadores, ya que permite analizar las propiedades de continuidad de T_a a partir de la de $K_a * f$ y viceversa.

Lema 2.4. *Sea $0 < a < 1$. Entonces, existe una constante positiva $C = C(a, n)$ tal que la desigualdad*

$$|T_a f(x)| \leq C (|K_a * f(x)| + Mf(x)) \quad (2.5)$$

*vale para toda $f \in L^p$, $1 \leq p \leq \infty$. Más aún, los roles de $T_a f$ y $K_a * f$ pueden intercambiarse en (2.5).*

Demostración. Si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$, en virtud de (2.3), existe una constante positiva $C = C(a, n)$ tal que

$$|T_a f(x)| \approx |K_a * f(x) + L_a * f(x)| \leq |K_a * f(x)| + |L_a * f(x)|,$$

donde $L_a \in L^1(\mathbb{R}^n)$ satisface (2.4). Luego, para obtener (2.5), es suficiente probar que

$$|L_a * f(x)| \lesssim Mf(x). \quad (2.6)$$

Por definición, resulta

$$|L_a * f(x)| \lesssim \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(y)|}{(1 + |x - y|)^{n+1}} dy + \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|x - y|^{a'}}{|x - y|^n} \chi_{\{|x-y| \leq 1\}}(x - y) |f(y)| dy = I + II,$$

donde $a' = \frac{a}{1-a}$.

Comencemos con la estimación de I . Sea Q un cubo centrado en $x \in \mathbb{R}^n$ con $l(Q) = 1$. Entonces,

$$I = \int_{2Q} \frac{|f(y)|}{(1 + |x - y|)^{n+1}} dy + \int_{\mathbb{R}^n \setminus 2Q} \frac{|f(y)|}{(1 + |x - y|)^{n+1}} dy = I_1 + I_2. \quad (2.7)$$

En primer lugar, notemos que $(1 + |x - y|)^{-(n+1)} \leq 1$. De este modo,

$$I_1 \leq \int_{2Q} |f(y)| dy = 2^n \left(\frac{1}{2^n} \int_{2Q} |f(y)| dy \right) \leq 2^n Mf(x).$$

Por otro lado, considerando $B(x, 1) \subseteq 2Q$ (véase la Proposición 1.1), se tiene que

$$\mathbb{R}^n \setminus 2Q \subseteq \mathbb{R}^n \setminus B(x, 1) = \{y \in \mathbb{R}^n : |x - y| \geq 1\}.$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned}
I_2 &\leq \int_{\{|x-y| \geq 1\}} \frac{|f(y)|}{(1+|x-y|)^{n+1}} dy \\
&\leq \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\{2^k \leq |x-y| < 2^{k+1}\}} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n+1}} dy \\
&\leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2^k)^{n+1}} \int_{B(x, 2^{k+1})} |f(y)| dy.
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $B(x, 2^{k+1}) \subseteq 2^{k+2}Q$, obtenemos

$$I_2 \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2^k)^{n+1}} \int_{2^{k+2}Q} |f(y)| dy = 4^n \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \left(\frac{1}{(2^{k+2})^n} \int_{2^{k+2}Q} |f(y)| dy \right) \leq 2^{2n+1} Mf(x).$$

Por lo tanto, volviendo a (2.7),

$$I \lesssim I_1 + I_2 \leq 2^n Mf(x) + 2^{2n+1} Mf(f) = CMf(x).$$

Solo nos resta estimar II . Notemos que,

$$II \approx \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|x-y|^{a'}}{|x-y|^n} \chi_{\{t \in \mathbb{R}^n: |t| \leq 1\}}(x-y) |f(y)| dy. \quad (2.8)$$

Para $x \in \mathbb{R}^n$, utilizando la subaditividad numerable, y considerando que $a' = \frac{a}{1-a}$ es una constante positiva, tenemos que

$$II \leq \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\{2^{-(k+1)} \leq |x-y| \leq 2^{-k}\}} \frac{|x-y|^{a'}}{|x-y|^n} |f(y)| dy \leq \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-a'k} \left(\frac{1}{2^{-n(k+1)}} \int_{B(x, 2^{-k})} |f(y)| dy \right).$$

$$\begin{aligned}
II &= \int_{\{y \in \mathbb{R}^n: |x-y| \leq 1\}} \frac{|x-y|^{a'}}{|x-y|^n} |f(y)| dy \\
&\leq \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\{y \in \mathbb{R}^n: 2^{-(k+1)} \leq |x-y| \leq 2^{-k}\}} \frac{|x-y|^{a'}}{|x-y|^n} |f(y)| dy \\
&\leq \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-a'k} \left(\frac{1}{2^{-n(k+1)}} \int_{B(x, 2^{-k})} |f(y)| dy \right).
\end{aligned}$$

Si Q es un cubo centrado en x con $l(Q) = 1$, entonces $B(x, 2^{-k}) \subseteq 2^{-k+1}Q$. Luego, de la desigualdad anterior, obtenemos

$$II \leq 4^n \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-a'k} \left(\frac{1}{2^{n(-k+1)}} \int_{2^{-k+1}Q} |f(y)| dy \right) \leq CMf(x).$$

A continuación, veamos que los roles de $T_a f$ y $K_a * f$ en (2.5) se pueden intercambiar. En virtud de (2.3), se tiene que

$$|K_a * f(x)| \approx |T_a f(x) - L * f(x)| \leq |T_a f(x)| + |L * f(x)|.$$

Utilizando la estimación (2.6), obtenemos

$$|K_a * f(x)| \leq C (|T_a f(x)| + Mf(x)),$$

donde $C = C(a, n)$ es una constante positiva. □

Luego, este resultado se aplica como se muestra a continuación.

Teorema 2.5 (Tipo fuerte (p, p) del operador $K_a * f$). *Sean $0 < a < 1$ y $1 < p < \infty$. Entonces, existe una constante positiva $C = C(a, n, p)$ tal que la desigualdad*

$$\|K_a * f\|_{L^p} \leq C \|f\|_{L^p}$$

vale para toda $f \in L^p$.

Demostración. Sea $f \in L^p$. En virtud del Lema 2.4, se tiene que

$$\|K_a * f\|_{L^p} \lesssim \|T_a * f\|_{L^p} + \|Mf\|_{L^p}.$$

Considerando los Teoremas 2.2 y 1.22, que establecen el tipo fuerte (p, p) para $1 < p < \infty$ de los operadores T_a y M , respectivamente, concluimos que

$$\|K_a * f\|_{L^p} \leq C \|f\|_{L^p},$$

donde $C = C(a, n, p)$ es una constante positiva. □

2.2. Algunas estimaciones útiles

Presentamos algunas definiciones y resultados técnicos fundamentales para el desarrollo de nuestro estudio. Las Proposiciones 2.6, 2.7, 2.8 y 2.9 se emplearán en la Sección 3.1 del siguiente capítulo. Por su parte, la Proposición 2.10 será utilizada en la demostración del Lema 3.4 y del Teorema 4.2. Como es habitual, consideraremos $0 < a < 1$ y $a' = \frac{a}{1-a}$.

Sean $\tilde{v}, \xi \in \mathbb{R}$ arbitrarios. Para $t \in \mathbb{R}$, definimos

$$\Phi(t) = t^{a'} + \tilde{v} \log t - \frac{\xi}{t}. \quad (2.9)$$

Sea $\eta > 0$ suficientemente grande de modo que

$$12 \left(\frac{2a'}{3} \right)^{\frac{a'}{1+a'}} \leq \eta. \quad (2.10)$$

Por definición, η verifica la siguiente propiedad

$$\frac{a'}{4} \leq \frac{a'}{3} - \left(\frac{\eta}{a'} \right) \left(\frac{2a'}{3} \right)^{\frac{a'}{1+a'}}.$$

Dado $\eta > 0$, sea $\omega > 1$ suficientemente grande de modo que

$$\frac{4a'}{\eta} \leq \omega \quad \text{y} \quad a' \left(\frac{4}{a'} \right)^{\frac{a'}{1+a'}} \leq \omega. \quad (2.11)$$

Por definición, ω verifica la siguiente propiedad

$$\frac{(a')^2}{\eta\omega} + \left(\frac{a'}{\omega} \right)^{\frac{1+a'}{a'}} \leq \frac{a'}{2}.$$

Proposición 2.6. Sean $\eta > 0$ y $\tilde{v} \in \mathbb{R}$. Si $\xi \in \mathbb{R}$ satisface la condición

$$|\xi| \geq \max \left\{ 1, \left(\frac{\eta|\tilde{v}|}{a'} \right)^{\frac{1+a'}{a'}} \right\}, \quad (2.12)$$

entonces se cumple que

$$|\tilde{v}| \leq \frac{a'}{\eta} |\xi|^{\frac{a'}{1+a'}}.$$

Demostración. Por hipótesis, está claro que

$$\left(\frac{\eta|\tilde{v}|}{a'} \right)^{\frac{1+a'}{a'}} \leq \max \left\{ 1, \left(\frac{\eta|\tilde{v}|}{a'} \right)^{\frac{1+a'}{a'}} \right\} \leq |\xi|.$$

Dado que $a' > 0$, obtenemos

$$\frac{\eta|\tilde{v}|}{a'} \leq |\xi|^{\frac{a'}{1+a'}}.$$

Luego,

$$|\tilde{v}| \leq \frac{a'}{\eta} |\xi|^{\frac{a'}{1+a'}}. \quad \square$$

Proposición 2.7. Sean η y Φ como se definieron (2.10) y (2.9), respectivamente. Supongamos que $\xi \in \mathbb{R}$ satisface la condición (2.12) de la Proposición 2.6 y $t_0 = \left(\frac{3|\xi|}{2a'}\right)^{\frac{1}{1+a'}}$. Entonces,

(a) Si $\xi \geq 0$, existe una constante positiva C tal que la desigualdad

$$|\Phi'(t)| \geq C \frac{|\xi|}{t^2}$$

vale para todo $t \in (0, t_0]$.

(b) Si $\xi \leq 0$, existe una constante positiva $C = C(a)$ tal que la desigualdad

$$|\Phi''(t)| \geq C \frac{|\xi|}{t^3} \tag{2.13}$$

vale para todo $t \in (0, t_0]$.

Demostración. Comencemos con la demostración del inciso (a). Por definición,

$$\Phi'(t) = a't^{a'-1} + \frac{\tilde{v}}{t} + \frac{\xi}{t^2}.$$

Dado que a' , t y ξ son no negativos, podemos afirmar que

$$|\Phi'(t)| = \left| a't^{a'-1} + \frac{\xi}{t^2} + \frac{\tilde{v}}{t} \right| \geq \left| a't^{a'-1} + \frac{\xi}{t^2} - \frac{|\tilde{v}|}{t} \right| \geq \frac{\xi}{t^2} - \frac{|\tilde{v}|}{t} = \frac{1}{t^2} (\xi - t|\tilde{v}|). \tag{2.14}$$

Si $t \in (0, t_0]$, en virtud de la Proposición 2.6, se cumple que $|\tilde{v}| \leq \frac{a'}{\eta} |\xi|^{\frac{a'}{1+a'}}$. En consecuencia,

$$t|\tilde{v}| \leq t_0|\tilde{v}| \leq \left(\frac{3}{2a'}\right)^{\frac{1}{1+a'}} \left(\frac{a'}{\eta}\right) |\xi|^{\frac{1}{1+a'} + \frac{a'}{1+a'}} = \left(\frac{3}{2a'}\right)^{\frac{1}{1+a'}} \left(\frac{a'}{\eta}\right) |\xi| \tag{2.15}$$

Dado que la condición (2.10) es equivalente a

$$\frac{a'}{\eta} \leq \frac{a'}{12} \left(\frac{3}{2a'}\right)^{\frac{a'}{1+a'}},$$

sustituyendo en (2.15), se tiene que

$$t|\tilde{v}| \leq \frac{a'}{12} \left(\frac{3}{2a'}\right)^{\frac{1}{1+a'} + \frac{a'}{1+a'}} |\xi| = \frac{|\xi|}{8} \leq \frac{|\xi|}{2}. \tag{2.16}$$

Por lo tanto, volviendo a (2.14) y considerando que $\xi \geq 0$, obtenemos

$$|\Phi'(t)| \geq \frac{1}{t^2} (\xi - t|\tilde{v}|) \geq \frac{1}{t^2} \left(\xi - \frac{|\xi|}{2} \right) = \frac{|\xi|}{2t^2}.$$

Para la demostración de (b), notemos que

$$\Phi''(t) = a'(a' - 1)t^{a'-2} - \frac{\tilde{v}}{t^2} - \frac{2\xi}{t^3}.$$

En primer lugar, consideraremos $a' \geq 1$. Dado que $a'(a' - 1)$, t y $-\xi$ son no negativos, podemos afirmar que

$$\begin{aligned} |\Phi''(t)| &= \left| a'(a' - 1)t^{a'-2} + \frac{2|\xi|}{t^3} - \frac{\tilde{v}}{t^2} \right| \\ &\geq \left| a'(a' - 1)t^{a'-2} + \frac{2|\xi|}{t^3} \right| - \frac{|\tilde{v}|}{t^2} \geq \frac{2|\xi|}{t^3} - \frac{|\tilde{v}|}{t^2} = \frac{1}{t^3} (2|\xi| - t|\tilde{v}|). \end{aligned}$$

Si $t \in (0, t_0]$, sustituyendo (2.16) en el lado derecho de la estimación anterior, obtenemos

$$|\Phi''(t)| \geq \frac{1}{t^3} (2|\xi| - t|\tilde{v}|) \geq \frac{1}{t^3} \left(2|\xi| - \frac{|\xi|}{2} \right) = \frac{3|\xi|}{2t^3}.$$

(Observemos que (2.16) no depende del signo de ξ).

A continuación, supongamos que $0 < a' < 1$. Dado que $a'(a' - 1) = -a'(1 - a') < 0$ y $t \leq t_0$, podemos asegurar que

$$\begin{aligned} |\Phi''(t)| &= \left| -a'(1 - a')t^{a'-2} - \frac{\tilde{v}}{t^2} + \frac{2|\xi|}{t^3} \right| \\ &\geq \frac{2|\xi|}{t^3} - a'(1 - a')t^{a'-2} - \frac{|\tilde{v}|}{t^2} \geq \frac{1}{t^3} \left(2|\xi| - a'(1 - a')t_0^{1+a'} - t|\tilde{v}| \right). \end{aligned}$$

Sustituyendo (2.16) y utilizando la definición de t_0 en el lado derecho de la estimación anterior, obtenemos

$$|\Phi''(t)| \geq \frac{1}{t^3} \left(2|\xi| - a'(1 - a')t_0^{1+a'} - t|\tilde{v}| \right) \geq \frac{1}{t^3} \left(2|\xi| - \frac{|\xi|}{2} - a'(1 - a')\frac{3|\xi|}{2a'} \right) = \frac{3a'|\xi|}{2t^3}.$$

Sea $C = \max \left\{ \frac{3}{2}, \frac{3a'}{2} \right\}$. Luego, $|\Phi''(t)| \geq C\frac{|\xi|}{t^3}$ para todo $t \in (0, t_0]$. □

Proposición 2.8. Sean η y Φ como se definieron (2.10) y (2.9), respectivamente. Supongamos que $\xi \in \mathbb{R}$ satisface la condición (2.12) de la Proposición 2.6 y $t_0 = \left(\frac{3|\xi|}{2a'} \right)^{\frac{1}{1+a'}}$. Entonces, existe una constante positiva $C = C(a)$ tal que la desigualdad

$$|\Phi'(t)| \geq Ct^{a'-1}$$

vale para todo $t > t_0$.

Demostración. Por definición,

$$\Phi'(t) = a't^{a'-1} + \frac{\tilde{v}}{t} + \frac{\xi}{t^2}.$$

Dado que a' y $t > t_0$ son positivos, aplicando dos veces la desigualdad triangular, resulta

$$|\Phi'(t)| = \left| a't^{a'-1} + \frac{\tilde{v}}{t} + \frac{\xi}{t^2} \right| \geq a't^{a'-1} - \frac{|\tilde{v}|}{t} - \frac{|\xi|}{t^2} \geq t^{a'-1} \left(a' - \frac{|\tilde{v}|}{t_0^{a'}} - \frac{|\xi|}{t_0^{1+a'}} \right). \quad (2.17)$$

De la definición de t_0 y dado que, en virtud de la Proposición 2.6, se tiene que $|\tilde{v}| \leq \left(\frac{a'}{\eta}\right) |\xi|^{\frac{a'}{1+a'}}$,

$$a' - \frac{|\tilde{v}|}{t_0^{a'}} - \frac{|\xi|}{t_0^{1+a'}} = a' - |\tilde{v}| \left(\frac{3|\xi|}{2a'}\right)^{-\frac{a'}{1+a'}} - |\xi| \left(\frac{3|\xi|}{2a'}\right)^{-1} \geq a' - \left(\frac{a'}{\eta}\right) \left(\frac{2a'}{3}\right)^{\frac{a'}{1+a'}} - \frac{2a'}{3} \geq \frac{a'}{4},$$

donde la última estimación se obtiene de las hipótesis sobre η .

Por lo tanto, volviendo a (2.17), obtenemos

$$|\Phi'(t)| \geq t^{a'-1} \left(a' - \frac{|\tilde{v}|}{t_0^{a'}} - \frac{|\xi|}{t_0^{1+a'}} \right) \geq \frac{a'}{4} t^{a'-1}. \quad \square$$

Proposición 2.9. Sean η, ω y Φ como se definieron (2.10), (2.11) y (2.9), respectivamente. Supongamos que $\xi \in \mathbb{R}$ satisface la condición $|\xi| \leq \max \left\{ 1, \left(\frac{\eta|\tilde{v}|}{a'}\right)^{\frac{1+a'}{a'}} \right\}$ y $t_0 = \max \left\{ \left(\frac{\omega}{a'}\right)^{\frac{1}{a'}}, \left(\frac{\eta\omega|\tilde{v}|}{(a')^2}\right)^{\frac{1}{a'}} \right\}$. Entonces, existe una constante positiva $C = C(a)$ tal que la desigualdad

$$|\Phi'(t)| \geq Ct^{a'-1}$$

vale para todo $t \in (t_0, N)$.

Demostración. Por definición,

$$\Phi'(t) = a't^{a'-1} + \frac{\tilde{v}}{t} + \frac{\xi}{t^2}.$$

Utilizando los mismos argumentos que en (2.17), podemos afirmar que

$$|\Phi'(t)| \geq t^{a'-1} \left(a' - \frac{|\tilde{v}|}{t_0^{a'}} - \frac{|\xi|}{t_0^{1+a'}} \right). \quad (2.18)$$

En primer lugar, consideraremos $\eta|\tilde{v}| \leq a'$. En este caso, se tiene que $\left(\frac{\eta|\tilde{v}|}{a'}\right)^{\frac{1+a'}{a'}} \leq 1$ y, en consecuencia, $|\xi| \leq 1$ y $t_0 = \left(\frac{\omega}{a'}\right)^{\frac{1}{a'}}$. De este modo,

$$a' - \frac{|\tilde{v}|}{t_0^{a'}} - \frac{|\xi|}{t_0^{1+a'}} = a' - |\tilde{v}| \left(\frac{\omega}{a'}\right)^{-1} - |\xi| \left(\frac{\omega}{a'}\right)^{-\frac{1+a'}{a'}} \geq a' - \frac{(a')^2}{\eta\omega} - \left(\frac{a'}{\omega}\right)^{\frac{1+a'}{a'}} \geq \frac{a'}{2},$$

donde la última estimación se obtiene de las hipótesis sobre ω .

Por otro lado, si $\eta|\tilde{v}| > a'$, se tiene que $1 < \left(\frac{\eta|\tilde{v}|}{a'}\right)^{\frac{1+a'}{a'}}$ y, en consecuencia, $|\xi| \leq \left(\frac{\eta|\tilde{v}|}{a'}\right)^{\frac{1+a'}{a'}}$ y $t_0 = \left(\frac{\eta\omega|\tilde{v}|}{(a')^2}\right)^{\frac{1}{a'}}$. Luego, de las hipótesis sobre ω , resulta

$$a' - \frac{|\tilde{v}|}{t_0^{a'}} - \frac{|\xi|}{t_0^{1+a'}} = a' - |\tilde{v}| \left(\frac{\eta\omega|\tilde{v}|}{(a')^2}\right)^{-1} - |\xi| \left(\frac{\eta\omega|\tilde{v}|}{(a')^2}\right)^{-\frac{1+a'}{a'}} \geq a' - \frac{(a')^2}{\eta\omega} - \left(\frac{a'}{\omega}\right)^{\frac{1+a'}{a'}} \geq \frac{a'}{2}.$$

Volviendo a (2.18), obtenemos

$$|\Phi'(t)| \geq t^{a'-1} \left(a' - \frac{|\tilde{v}|}{t_0^{a'}} - \frac{|\xi|}{t_0^{1+a'}} \right) \geq \frac{a't^{a'-1}}{2}. \quad \square$$

Proposición 2.10. Sea $0 < \lambda < n$. Entonces, existe una constante positiva $C = C(n, \lambda)$ tal que la desigualdad

$$\left| \frac{1}{|x-y|^{n-\lambda}} - \frac{1}{|x|^{n-\lambda}} \right| \leq C \frac{|y|}{|x|^{(n+1)-\lambda}}$$

vale para $x, y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ con $|x| \geq 2|y|$.

Demostración. Sean $x, y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tales que $|x| \geq 2|y|$. Por el teorema del valor medio, se tiene que

$$\left| \frac{1}{|x-y|^{n-\lambda}} - \frac{1}{|x|^{n-\lambda}} \right| = \left| -\frac{n-\lambda}{\xi^{(n+1)-\lambda}} \right| \left| |x-y| - |x| \right|,$$

donde ξ es un valor medio entre $|x|$ y $|x-y|$.

Dependiendo de la positiva de x e y , se cumple que $|x-y| < |x|$ o $|x| < |x-y|$. En ambos casos, teniendo en cuenta que $|x| \geq 2|y|$, y utilizando el mismo razonamiento que en (2.1), tenemos que $\frac{|x|}{2} \leq \xi$. Por lo tanto, considerando que $\left| |x-y| - |x| \right| \leq |y|$, obtenemos

$$\left| \frac{1}{|x-y|^{n-\lambda}} - \frac{1}{|x|^{n-\lambda}} \right| \leq (n-\lambda) \frac{|y|}{\xi^{(n+1)-\lambda}} \leq 2^{(n+1)-\lambda} (n+1) \frac{|y|}{|x|^{(n+1)-\lambda}} = C \frac{|y|}{|x|^{(n+1)-\lambda}},$$

donde $C = 2^{(n+1)-\lambda} n$ es una constante positiva. □

Capítulo 3

Operadores fuertemente singulares en $L^p(w)$, con $1 < p < \infty$ y $w \in A_p$

En este capítulo, siguiendo los lineamientos de Sagun Chanillo en [2], demostraremos el siguiente resultado.

Teorema 3.1. *Sean $0 < a < 1$, $1 < p < \infty$ y $w \in A_p$. Entonces, existe una constante positiva $C = C(a, n, p, [w]_{A_p})$ tal que la desigualdad*

$$\|K_a * f\|_{L^p(w)} \leq C \|f\|_{L^p(w)}$$

vale para toda $f \in L^p(w)$.

Luego, en virtud del Lema 2.4, derivaremos la siguiente estimación de tipo fuerte (p, p) .

Corolario 3.2. *Sean $0 < a < 1$, $1 < p < \infty$ y $w \in A_p$. Entonces, existe una constante positiva $C = C(a, n, p, [w]_{A_p})$ tal que la desigualdad*

$$\|T_a f\|_{L^p(w)} \leq C \|f\|_{L^p(w)}$$

vale para toda $f \in L^p(w)$.

A continuación, enunciaremos un resultado de acotación en L^p para un operador auxiliar definido a partir de $K_a * f$. Este resultado, que será probado en la siguiente sección de este capítulo, es fundamental para la demostración de dos resultados clave de esta monografía.

Teorema 3.3 (Tipo fuerte (p, p') del operador $\tilde{K}_{a,p} * f$). Sean $0 < a < 1$, $a' = \frac{a}{1-a}$, $\gamma = a^{a'} - a^{1+a'}$ y $1 < p < 2$ tales que $2 + a' < p'$. Formalmente, definimos el **núcleo** $\tilde{K}_{a,p}$ como la “función”

$$\tilde{K}_{a,p}(x) = \frac{e^{i\gamma|x|^{-a'}}}{|x|^{\frac{n(2+a')}{p'}}}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Entonces, existe una constante positiva $C = C(a, n)$ tal que la desigualdad

$$\|\tilde{K}_{a,p} * f^1\|_{L^{p'}} \leq C \|f\|_{L^p}$$

vale para toda $f \in L^p$.

El siguiente lema es un análogo del Teorema 1.31 para operadores fuertemente singulares.

Lema 3.4. Sea $0 < a < 1$. Entonces, existen $1 < s_0 < 2$ y una constante positiva $C = C(a, n)$ tales que la desigualdad

$$M^\#(K_a * f)(x) \leq CM_s f(x) \tag{3.1}$$

vale para todo $1 < s \leq s_0$ y toda $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Demostración del Lema 3.4. Sean $1 < s < 2$ tal que $2 + a' < s'$ y $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Dado que el operador $K_a * f$ es invariante por traslaciones (véase la Observación 1.30), es suficiente demostrar que la estimación (3.1) se verifica en el origen de coordenadas. Por definición,

$$M^\#(K_a * f)(0) = \sup_{Q \ni 0} \frac{1}{|Q|} \int_Q |K_a * f(x) - (K_a * f)_Q| dx.$$

Para obtener la estimación deseada, probaremos que existe una constante positiva $C = C(a, n)$ tal que la desigualdad

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q |K_a * f(x) - (K_a * f)_Q| dx \leq CM_s f(0) \tag{3.2}$$

vale para todo cubo Q centrado en 0 con lados paralelos a los ejes coordenados de longitud $l(Q)$.

Luego, en virtud de la Observación 1.27, obtenemos (3.1).

Sea $\delta > 0$ tal que $2\delta \leq \delta^{1-a} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}$. La estimación de (3.2) se consigue separando el análisis en dos casos.

¹Si bien, de acuerdo con la literatura clásica, definimos el núcleo $\tilde{K}_{a,p}$ como una “función”, este se interpretará en el sentido del valor principal, es decir, como distribución cuando $x \in \text{sop } f$

Caso 1. Supongamos que $l(Q) < \delta$. Por hipótesis, está claro que $2Q \subseteq \frac{1}{l(Q)^a}Q \subseteq \frac{1}{2\sqrt{n}l(Q)}Q$.

Definimos

$$\begin{aligned} E_1 &= 2Q, & E_2 &= \mathbb{R}^n \setminus \frac{4}{l(Q)}Q, & E_3 &= \frac{4}{l(Q)}Q \setminus \frac{1}{2\sqrt{n}l(Q)}Q, \\ E_4 &= \frac{1}{2\sqrt{n}l(Q)}Q \setminus \frac{1}{l(Q)^a}Q, & \text{y} & & E_5 &= \frac{1}{l(Q)^a}Q \setminus 2Q. \end{aligned}$$

Sea $f(x) = \sum_{j=1}^5 f_j(x)$, donde $f_j(x) = f\chi_{E_j}(x)$. Por linealidad, es suficiente demostrar que la estimación (3.2) se cumple para cada una de las funciones recién definidas.

Comencemos con la estimación correspondiente a f_1 . De la desigualdad triangular, resulta

$$I = \frac{1}{|Q|} \int_Q |K_a * f_1(x) - (K_a * f_1)_Q| dx \leq \frac{2}{|Q|} \int_Q |K_a * f_1(x)| dx. \quad (3.3)$$

Aplicando la **desigualdad de Jensen** y por el **tipo fuerte (p, p) del operador $K_a * f$** para $1 < p < \infty$, se tiene que

$$I \lesssim \left(\frac{1}{|Q|} \int_{\mathbb{R}^n} |K_a * f_1(x)|^s dx \right)^{\frac{1}{s}} \lesssim \left(\frac{1}{|Q|} \int_{\mathbb{R}^n} |f_1(x)|^s dx \right)^{\frac{1}{s}}.$$

Dado que $\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = 1$ y considerando el soporte de f_1 , obtenemos

$$I \lesssim \left(\frac{1}{|Q|} \int_{\mathbb{R}^n} |f_1(x)|^s dx \right)^{\frac{1}{s}} \approx \left(\frac{1}{|2Q|} \int_{2Q} |f(x)|^s dx \right)^{\frac{1}{s}} \lesssim M_s f(0).$$

Para la estimación que involucra a f_2 , procediendo como en (3.3), se tiene que

$$\begin{aligned} II &= \frac{1}{|Q|} \int_Q |K_a * f_2(x) - (K_a * f_2)_Q| dx \leq \frac{2}{|Q|} \int_Q |K_a * f_2(x)| dx \\ &\leq \frac{2}{|Q|} \int_Q \int_{E_2} |K_a(x-y)| |f(y)| dy dx. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Teniendo en cuenta la definición del núcleo K_a , resulta

$$II \lesssim \frac{1}{|Q|} \int_Q \int_{E_2} |K_a(x-y)| |f(y)| dy dx \approx \frac{1}{|Q|} \int_Q \int_{E_2} \frac{|f(y)|}{|x-y|^n} \chi_{\{|x-y| \leq 1\}}(x-y) dy dx.$$

Dado que $x \in Q$, se cumple $\|x\|_\infty < \frac{l(Q)}{2} < \frac{\delta}{2} < \frac{1}{4\sqrt{n}}$. Luego, si $|x-y| \leq 1$, obtenemos

$$\|y\|_\infty \leq \|x-y\|_\infty + \|x\|_\infty \leq |x-y| + \|x\|_\infty \leq 1 + \frac{1}{4\sqrt{n}} < 2. \quad (3.5)$$

En consecuencia, $\{y \in \mathbb{R}^n : |x-y| \leq 1\} \subseteq \mathbb{R}^n \setminus E_2$, y la función característica $\chi_{\{|x-y| \leq 1\}}(x-y) = 0$ para $y \in E_2$. Por lo tanto,

$$II = 0 \leq Mf(0).$$

Para la estimación correspondiente a f_3 , siguiendo el mismo razonamiento que en (3.4), resulta

$$III \lesssim \frac{1}{|Q|} \int_Q \int_{E_3} |K_a(x-y)| |f(y)| dy dx.$$

A partir de la definición de K_a y considerando el soporte de f_3 , obtenemos

$$\begin{aligned} III &\lesssim \frac{1}{|Q|} \int_Q \int_{E_3} \frac{|f(y)|}{|y|^n} dy dx = \frac{1}{|Q|} \int_Q \int_{\{\frac{1}{4\sqrt{n}} \leq \|y\|_\infty < 2\}} \frac{|f(y)|}{|y|^n} dy dx \\ &\lesssim \frac{1}{|Q|} \int_Q \left(\frac{1}{|\frac{4}{l(Q)}Q|} \int_{\frac{4}{l(Q)}Q} |f(y)| dy \right) dx \\ &\lesssim Mf(0), \end{aligned} \tag{3.6}$$

donde la anteúltima estimación se obtiene al considerar que $|\frac{1}{2\sqrt{nl(Q)}}Q| = \frac{\sqrt{n^n}}{8^n n^n} |\frac{4}{l(Q)}Q|$.

A continuación, veamos que (3.2) se cumple para f_4 . Si λ es una constante (que puede depender de Q), se tiene que

$$IV = \frac{1}{|Q|} \int_Q |K_a * f_4(x) - (K_a * f_4)_Q| dx \leq \frac{2}{|Q|} \int_Q |K_a * f_4(x) - \lambda| dx.$$

La estimación deseada se obtiene eligiendo adecuadamente el valor de λ . Dado que $f \in C_c^\infty$ y considerando el soporte de f_4 , resulta

$$|K_a * f_4(0)| \lesssim \|f\|_{L^\infty} \int_{\{\frac{1}{2}l(Q)^{1-a} \leq \|y\|_\infty \leq \frac{1}{4\sqrt{n}}\}} \frac{1}{|y|^n} dy \lesssim \|f\|_{L^\infty} \frac{|\frac{1}{2\sqrt{nl(Q)}}Q|}{|\frac{1}{l(Q)^a}Q|} < \infty.$$

Sea $\lambda = K_a * f_4(0)$. Por la asociatividad del producto de convolución, obtenemos

$$IV \lesssim \frac{1}{|Q|} \int_Q \int_{E_4} |K_a(x-y) - K_a(y)| |f(y)| dy dx.$$

Dado que $x \in Q$ e $y \in E_4$, se cumple $2|x| \leq \sqrt{nl(Q)} \leq \sqrt{nl(Q)}^{1-a'} \leq |y| \leq \frac{1}{2}$. Aplicando la Proposición 2.1, se tiene que

$$\int_{E_4} |K_a(x-y) - K_a(y)| |f(y)| dy \lesssim l(Q) \int_{E_4} \frac{|f(y)|}{|y|^{(n+1)+a'}} dy.$$

En virtud de la Proposición 1.1, sabemos que

$$E_4 \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \frac{1}{l(Q)^a}Q \subseteq \{y \in \mathbb{R}^n : |y| \geq \frac{1}{2}l(Q)^{1-a}\}.$$

Utilizando este hecho y la relación $1 = (1-a)(1+a')$, podemos controlar el lado derecho de la estimación anterior por

$$l(Q) \int_{\mathbb{R}^n \setminus \frac{1}{l(Q)^a}Q} \frac{|f(y)|}{|y|^{(n+1)+a'}} dy \lesssim l(Q) \int_{\{|y| \geq \frac{1}{2}l(Q)^{1-a}\}} \frac{|f(y)|}{|y|^{(n+1)+a'}} dy$$

$$\begin{aligned}
&\lesssim l(Q) \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\{|y| \approx 2^k l(Q)^{1-a}\}} \frac{|f(y)|}{|y|^{(n+1)+a'}} dy \\
&\lesssim l(Q) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{-k(1+a')}}{l(Q)} \left(\frac{1}{|2^{k+2} \frac{1}{l(Q)^a} Q|} \int_{2^{k+2} \frac{1}{l(Q)^a} Q} |f(y)| dy \right) \\
&\lesssim Mf(0).
\end{aligned}$$

Por último, para la estimación correspondiente a f_5 , también se cumple

$$V = \frac{1}{|Q|} \int_Q |K_a * f_5(x) - (K_a * f_5)_Q| dx \lesssim \frac{1}{|Q|} \int_Q |K_a * f_5(x)| dx.$$

Sea $\tilde{K}_{a,s}$ el núcleo definido en el Teorema 3.3. Descomponemos

$$\begin{aligned}
K_a * f_5(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{K}_{a,s}(x-y) \left(\frac{1}{|x-y|^{n-n(2+a')/s'}} - \frac{1}{|y|^{n-n(2+a')/s'}} \right) f_5(y) dy \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{K}_{a,s}(x-y) \frac{f_5(y)}{|y|^{n-n(2+a')/s'}} dy \\
&= g(x) + h(x).
\end{aligned}$$

Es suficiente probar que (3.2) se cumple para cada una de las funciones recién definidas.

En primer lugar, dado que $2|x| \leq \sqrt{n}l(Q) \leq 2\sqrt{n}l(Q) \leq |y|$, de la Proposición 2.10, se tiene que

$$\left| \frac{1}{|x-y|^{n-\frac{n(2+a')}{s'}}} - \frac{1}{|y|^{n-\frac{n(2+a')}{s'}}} \right| \leq C \frac{l(Q)}{|y|^{(n+1)-\frac{n(2+a')}{s'}}},$$

donde $C = C(a, n)$ es una constante positiva. Dado que $B(0, l(Q)) \subseteq 2Q$ (véase la Proposición 1.1), aplicando la estimación recién obtenida, obtenemos

$$\begin{aligned}
|g(x)| &\lesssim l(Q) \int_{\mathbb{R}^n \setminus 2Q} \frac{|f(y)|}{|y|^{n+1}} dy \lesssim l(Q) \int_{\{|y| \geq l(Q)\}} \frac{|f(y)|}{|y|^{n+1}} dy \\
&\lesssim l(Q) \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\{|y| \approx 2^k l(Q)\}} \frac{|f(y)|}{|y|^{n+1}} dy \\
&\lesssim l(Q) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{-k}}{l(Q)} \left(\frac{1}{|2^{k+2} Q|} \int_{2^{k+2} Q} |f(y)| dy \right) \\
&\lesssim Mf(0). \tag{3.7}
\end{aligned}$$

Por otro lado, aplicando la [desigualdad de Jensen](#), se tiene que

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q |h(x)| dx \leq \left(\frac{1}{|Q|} \int_{\mathbb{R}^n} \left| \tilde{K}_{a,s} * \left(\frac{f_5(y)}{|y|^{n-n(2+a')/s'}} \right) (x) \right|^{s'} dx \right)^{\frac{1}{s'}}.$$

Debido al **tipo fuerte** (p, p') del operador $\tilde{K}_{a,p} * f$ para $1 < p < 2$ tal que $2 + a' < p'$,

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q |h(x)| dx \lesssim \frac{1}{|Q|^{\frac{1}{s'}}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f_5(y)|^s}{|y|^{n+n(1-s)(1+a')}} dy \right)^{\frac{1}{s}}.$$

Luego, considerando que $B(0, l(Q)) \subseteq 2Q$, obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{|Q|} \int_Q |h(x)| dx &\lesssim \frac{1}{|Q|^{\frac{1}{s'}}} \left(\sum_{k=0}^{k_0} \int_{\{|y| \approx 2^k l(Q)\}} \frac{|f(y)|^s}{|y|^{n+(1-s)(1+a')}} dy \right)^{\frac{1}{s}} \\ &\lesssim \frac{1}{|Q|^{\frac{1}{s'}}} \left(\sum_{k=0}^{k_0} |2^k Q|^{(s-1)(1+a')} \frac{1}{|2^{k+2} Q|} \int_{2^{k+2} Q} |f(y)|^s dy \right)^{\frac{1}{s}}, \end{aligned} \quad (3.8)$$

donde k_0 es un entero tal que $2^{k_0-1}l(Q) < l(Q)^{1-a} \leq 2^{k_0}l(Q)$. Expandiendo la suma geométrica, resulta

$$\begin{aligned} \frac{1}{|Q|^{\frac{1}{s'}}} \left(\sum_{k=0}^{k_0} |2^k Q|^{(s-1)(1+a')} \right)^{\frac{1}{s}} &= |Q|^{-\frac{1}{s'} + \frac{(s-1)(1+a')}{s}} \left(\frac{(2^{n(s-1)(1+a')})^{k_0+1} - 1}{2^{n(s-1)(1+a')} - 1} \right)^{\frac{1}{s}} \\ &\lesssim |Q|^{\frac{a'}{s'}} \left((2^{k_0+1})^{n(s-1)(1+a')} \right)^{\frac{1}{s}} \\ &\lesssim |Q|^{\frac{a'}{s'} - \frac{a'}{s'}}, \end{aligned} \quad (3.9)$$

donde la anteúltima estimación se obtiene al considerar que $2^{k_0+1} \leq \frac{4}{l(Q)^a}$ y la relación $a' = a(1+a')$.

Por lo tanto,

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q |h(x)| dx \lesssim M_s f(0).$$

Dado que las constantes involucradas son positivas y dependen solo de a y n , y considerando que $Mf(0) \lesssim M_s f(0)$ (véase la Proposición 1.23), se concluye la demostración de (3.2) para el **Caso 1**.

Caso 2. Supongamos que $l(Q) \geq \delta$. Por hipótesis, $Q \subseteq \frac{4}{\delta}Q$. Sea $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, donde $f_1(x) = f(x)\chi_{\frac{4}{\delta}Q}(x)$ y $f_2(x) = f(x)\chi_{\mathbb{R}^n \setminus \frac{4}{\delta}Q}(x)$. De la desigualdad triangular, resulta

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q |K_a * f(x) - (K_a * f)_Q| dx \lesssim \frac{1}{|Q|} \int_Q |K_a * f_1(x)| dx + \frac{1}{|Q|} \int_Q |K_a * f_2(x)| dx.$$

Luego, es suficiente probar que la estimación (3.2) se cumple para cada una de las funciones recién definidas.

En primer lugar, aplicando la **desigualdad de Jensen** y por el **tipo fuerte** (p, p) del operador $K_a * f$ para $1 < p < \infty$, se tiene que

$$I = \frac{1}{|Q|} \int_Q |K_a * f_1(x)| dx \leq \left(\frac{1}{|Q|} \int_{\mathbb{R}^n} |K_a * f_1(x)|^s dx \right)^{\frac{1}{s}} \lesssim \left(\frac{1}{|Q|} \int_{\mathbb{R}^n} |f_1(x)|^s dx \right)^{\frac{1}{s}}.$$

Teniendo en cuenta el soporte de f_1 y que $|Q| = \frac{\delta^n}{4^n} |\frac{4}{\delta}Q|$, obtenemos

$$I \lesssim \left(\frac{1}{|\frac{4}{\delta}Q|} \int_{\frac{4}{\delta}Q} |f(x)|^s dx \right)^{\frac{1}{s}} \lesssim M_s f(0).$$

Por otro lado, procediendo como en (3.4), se tiene que

$$II = \frac{1}{|Q|} \int_Q |K_{a'} * f_2(x)| dx \leq \frac{1}{|Q|} \int_Q \int_{\mathbb{R}^n \setminus \frac{4}{\delta}Q} \frac{|f(y)|}{|x-y|^n} \chi_{\{|x-y| \leq 1\}}(x-y) dy dx.$$

Dado que $x \in Q$, se cumple $\|x\|_\infty < \frac{l(Q)}{2} < \frac{l(Q)}{2\delta} < \frac{l(Q)}{\delta}$. Luego, si $|x-y| \leq 1$, obtenemos

$$\|y\|_\infty \leq \|x-y\|_\infty + \|x\|_\infty \leq |x-y| + \|x\|_\infty \leq 1 + \frac{l(Q)}{\delta} < \frac{2}{\delta} l(Q). \quad (3.10)$$

En consecuencia, $\{y \in \mathbb{R}^n : |x-y| \leq 1\} \subseteq \frac{4}{\delta}Q$, y la función característica $\chi_{\{|x-y| \leq 1\}}(x-y) = 0$ para $y \in \mathbb{R}^n \setminus \frac{4}{\delta}Q$. Por lo tanto,

$$II = 0 \leq M f(0).$$

Dado que las constantes involucradas son positivas y dependen solo de a y n , y considerando que $M f(0) \lesssim M_s f(0)$, se concluye la demostración de (3.2) para el **Caso 2**. \square

En este punto, podemos establecer la acotación en $L^p(w)$, para $1 < p < \infty$ y $w \in A_p$, del operador fuertemente singular $K_a * f$.

Demostración del Teorema 3.1. Dado que $w \in A_p$, por el inciso (a) del Teorema 1.36, existe $s_0 > 1$ tal que $w \in RH_{s_0}$. Además, en virtud del Lema 3.4, existe $s_1 > 1$ tal que, para todo $1 < s \leq s_1$, se cumple la desigualdad

$$M^\#(K_a * f)(x) \lesssim M_s f(x), \quad \forall f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n). \quad (3.11)$$

Por otra parte, de acuerdo con el Corolario 1.37, existe $1 < s_2 < p$ tal que el operador M_s es de tipo fuerte (s, s) con respecto a w para todo $s_2 < s < p$. Por lo tanto, tomando $s = \min\{s_0, s_1, s_2\}$, las tres condiciones se satisfacen simultáneamente. Notemos que $s = s(a, n, p, [w]_{A_p})$.

Sea $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Dado que $\text{sop } K_a \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\}$, entonces $\text{sop}(K_a * f) \subseteq Q_0$ para algún cubo Q_0 . Aplicando la **desigualdad de Hölder**, se tiene que

$$\|K_a * f\|_{L^p(w)}^p \leq \int_{Q_0} |K_a * f(x)|^p w(x) dx \leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |K_a * f(x)|^{ps'} dx \right)^{\frac{1}{s'}} \left(\int_{Q_0} w^s(x) dx \right)^{\frac{1}{s}}.$$

Debido al **tipo fuerte** (p, p) del operador $K_a * f$ para $1 < p < \infty$, obtenemos

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |K_a * f(x)|^{ps'} dx \right)^{\frac{1}{s'}} \lesssim \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{ps'} dx \right)^{\frac{1}{s'}} < \infty.$$

Por otro lado, teniendo en cuenta que $w \in RH_s$, resulta

$$\left(\int_{Q_0} w^s(x) dx \right)^{\frac{1}{s}} \leq \frac{C}{|Q_0|^{\frac{1}{s'}}} \int_{Q_0} w(x) dx < \infty.$$

De este modo, $\|K_a * f\|_{L^p(w)} < \infty$. En virtud de la **desigualdad de Jensen**, considerando $w \equiv 1$ y procediendo de forma análoga, es fácil ver que $K_a * f \in L^1_{\text{loc}}$.

Por el inciso (a) de la Proposición 1.21, se cumple que $|K_a * f(x)| \leq |M(K_a * f)(x)|$ en c.t.p. x .

En consecuencia,

$$\|K_a * f\|_{L^p(w)} \leq \|M(K_a * f)\|_{L^p(w)}.$$

Dado que $\|K_a * f\|_{L^p(w)} < \infty$, aplicando el Teorema 1.35 y la estimación (3.11), obtenemos

$$\|M(K_a * f)\|_{L^p(w)} \lesssim \|M^\#(K_a * f)\|_{L^p(w)} \lesssim \|M_s f\|_{L^p(w)}.$$

Por lo tanto, como resultado de la elección de s , concluimos que

$$\|K_a * f\|_{L^p(w)} \lesssim \|M_s f\|_{L^p(w)} \leq C \|f\|_{L^p(w)},$$

donde $C = C(a, n, p, [w]_{A_p})$ es una constante positiva.

Si $f \in L^p(w)$, en virtud del Teorema 1.6, existe una sucesión $\{f_j\}_j \subseteq C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ que converge a f en $L^p(w)$. Luego, existe una subsucesión $\{f_{j_k}\}_k$ tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} f_{j_k}(x) = f(x)$ en c.t.p. x . Por lo tanto, aplicando el **lema de Fatou**, se tiene que

$$\|K_a * f\|_{L^p(w)} = \left\| K_a * \left(\lim_{k \rightarrow \infty} f_{j_k} \right) \right\|_{L^p(w)} \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \|K_a * f_{j_k}\|_{L^p(w)} \leq C \lim_{j \rightarrow \infty} \|f_{j_k}\|_{L^p(w)} = C \|f\|_{L^p(w)}. \quad \square$$

Establecido este resultado, la demostración del Corolario 3.2 sigue como se detalla a continuación.

Demostración del Corolario 3.2. Si $f \in L^p(w)$, en virtud del Lema 2.4, existe una constante positiva, que depende solo de a y n , tal que se cumple la desigualdad

$$\|T_a f\|_{L^p(w)} \lesssim \|K_a * f\|_{L^p(w)} + \|M f\|_{L^p(w)}.$$

Aplicando los Teoremas 3.1 y 1.34, que garantizan la acotación en $L^p(w)$, para $1 < p < \infty$ y $w \in A_p$, de los operadores $K_a * f$ y M , respectivamente, obtenemos

$$\|T_a f\|_{L^p(w)} \leq C \|f\|_{L^p(w)},$$

donde $C = C(a, n, p, [w]_{A_p})$ es una constante positiva. □

3.1. Demostración del Teorema 3.3

El enfoque adoptado para demostrar este resultado utiliza el [teorema de interpolación de Stein](#).

Sean $0 < a < 1$, $a' = \frac{a}{1-a}$, $\gamma = a^{a'} - a^{1+a'}$, $\epsilon > 0$ y $z \in S = \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1\}$. Definimos el **núcleo** $\tilde{K}_{a,z}^\epsilon$ como la función

$$\tilde{K}_{a,z}^\epsilon(x) = \frac{e^{i\gamma|x|^{-a'}}}{|x|^{n(1+\frac{a'}{2})z}} \chi_{\{|x|>\epsilon\}}(x), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Si $f \in L^1$, el **operador** $T_{a,z}^\epsilon$ se define mediante la expresión

$$T_{a,z}^\epsilon f(x) = \tilde{K}_{a,z}^\epsilon * f(x).$$

El siguiente resultado garantiza la “admisibilidad” de esta familia de operadores lineales.

Lema 3.5. *La familia de operadores lineales $\{T_{a,z}^\epsilon\}_{z \in S}$ es una familia analítica de operadores de crecimiento admisible.*

Demostración. Sea $z = u + iv \in S$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que f y g son funciones simples a valores reales. Dado que

$$\left| \frac{1}{|x|^{in(1+\frac{a'}{2})v}} \right| = \left| e^{-in(1+\frac{a'}{2})v \log|x|} \right| = 1, \quad (3.12)$$

y considerando que $0 \leq u \leq 1$, obtenemos

$$|\tilde{K}_{a,z}^\epsilon(x)| = \frac{1}{|x|^{n(1+\frac{a'}{2})u}} \chi_{\{|x|>\epsilon\}}(x) \leq \max \left\{ 1, \frac{1}{\epsilon^{n(1+\frac{a'}{2})}} \right\}.$$

En consecuencia, $\|\tilde{K}_{a,z}^\epsilon\|_{L^\infty} < \infty$, y este valor no depende de z .

Aplicando la [desigualdad de Hölder](#) y la [desigualdad de Young](#), se tiene que

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} T_{a,z}^\epsilon f(x) g(x) dx \right| \leq \|(T_{a,z}^\epsilon f)g\|_{L^1} \leq \|\tilde{K}_{a,z}^\epsilon * f\|_{L^\infty} \|g\|_{L^1} \leq \|\tilde{K}_{a,z}^\epsilon\|_{L^\infty} \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1} < \infty.$$

Por lo tanto, la aplicación

$$z \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} T_{a,z}^\epsilon f(x) g(x) dx \quad (3.13)$$

está bien definida y es continua en la frontera de S . Más aún, existen constantes positivas $A < \pi$ y $B = B(f, g)$ tales que la desigualdad

$$e^{-A|v|} \log \left| \int_{\mathbb{R}^n} T_{a,z}^\epsilon f(x) g(x) dx \right| \leq B < \infty$$

vale para todo $z \in S$.

Solo nos resta demostrar la analiticidad de la aplicación (3.13) en el interior de S . Teniendo en cuenta la relación (3.12), escribimos

$$\tilde{K}_{a,z}^\epsilon(x) = \frac{\exp i (\gamma|x|^{-a'} - n(1 + \frac{a'}{2})v \log|x|)}{|x|^{n(1+\frac{a'}{2})u}} \chi_{\{|x|>\epsilon\}}(x) = F_x(u, v).$$

Probaremos que

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(\operatorname{Re} \int_{\mathbb{R}^n} T_{a,z}^\epsilon f(x) g(x) dx \right) (u, v) = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{\partial \operatorname{Re} F_x}{\partial u} * f \right) (x) g(x) dx \quad (3.14)$$

y

$$\frac{\partial}{\partial v} \left(\operatorname{Re} \int_{\mathbb{R}^n} T_{a,z}^\epsilon f(x) g(x) dx \right) (u, v) = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{\partial \operatorname{Re} F_x}{\partial v} * f \right) (x) g(x) dx. \quad (3.15)$$

De este modo, en virtud del [teorema de la convergencia dominada](#), el análisis se reduce a verificar que F_x satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann en el interior de S , y que los integrandos en el lado derecho de (3.14) y (3.15) están controlados por alguna función integrable sobre \mathbb{R}^n .

Aplicando la identidad de Euler, se tiene que

$$\operatorname{Re} F_x(u, v) = \frac{\cos (\gamma|x|^{-a'} - n(1 + \frac{a'}{2})v \log|x|)}{|x|^{n(1+\frac{a'}{2})u}} \chi_{\{|x|>\epsilon\}}(x)$$

y

$$\operatorname{Im} F_x(u, v) = \frac{\sin (\gamma|x|^{-a'} - n(1 + \frac{a'}{2})v \log|x|)}{|x|^{n(1+\frac{a'}{2})u}} \chi_{\{|x|>\epsilon\}}(x).$$

Al calcular las derivadas parciales respecto de u y v , obtenemos

$$\frac{\partial \operatorname{Re} F_x}{\partial u}(u, v) = \frac{-n(1 + \frac{a'}{2}) \log|x| \cos (\gamma|x|^{-a'} - n(1 + \frac{a'}{2})v \log|x|)}{|x|^{n(1+\frac{a'}{2})u}} \chi_{\{|x|>\epsilon\}}(x) = \frac{\partial \operatorname{Im} F_x}{\partial v}(u, v)$$

y

$$\frac{\partial \operatorname{Re} F_x}{\partial v}(u, v) = \frac{n(1 + \frac{a'}{2}) \log|x| \sin (\gamma|x|^{-a'} - n(1 + \frac{a'}{2})v \log|x|)}{|x|^{n(1+\frac{a'}{2})u}} \chi_{\{|x|>\epsilon\}}(x) = -\frac{\partial \operatorname{Im} F_x}{\partial u}(u, v).$$

Más aún, notemos que

$$\left| \frac{\partial \operatorname{Re} F_x}{\partial u}(u, v) \right| \leq \frac{n(1 + \frac{a'}{2}) |\log|x||}{|x|^{n(1+\frac{a'}{2})u}} \chi_{\{|x|>\epsilon\}}(x)$$

y

$$\left| \frac{\partial \operatorname{Re} F_x}{\partial v}(u, v) \right| \leq \frac{n(1 + \frac{a'}{2}) |\log|x||}{|x|^{n(1+\frac{a'}{2})u}} \chi_{\{|x|>\epsilon\}}(x).$$

Dado que $|x| > \epsilon$ y que las expresiones del lado derecho tienden a cero cuando $|x| \rightarrow \infty$, se concluye que $\left\| \frac{\partial \operatorname{Re} F_x}{\partial u} \right\|_{L^\infty} < \infty$ y $\left\| \frac{\partial \operatorname{Re} F_x}{\partial v} \right\|_{L^\infty} < \infty$. En consecuencia,

$$\left| \frac{\partial \operatorname{Re} F_x}{\partial u} * f(x) \right| |g(x)| \leq \left\| \frac{\partial \operatorname{Re} F_x}{\partial u} \right\|_{L^\infty} \|f\|_{L^1} |g(x)| \in L^1(\mathbb{R}^n)$$

y

$$\left| \frac{\partial \operatorname{Re} F_x}{\partial v} * f(x) \right| |g(x)| \leq \left\| \frac{\partial \operatorname{Re} F_x}{\partial v} \right\|_{L^\infty} \|f\|_{L^1} |g(x)| \in L^1(\mathbb{R}^n).$$

Por lo tanto, volviendo a (3.14) y (3.15) y considerando que F_x satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann en el interior de S , obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(\operatorname{Re} \int_{\mathbb{R}^n} T_{a,z}^\epsilon f(x) g(x) dx \right) (u, v) = \frac{\partial}{\partial v} \left(\operatorname{Im} \int_{\mathbb{R}^n} T_{a,z}^\epsilon f(x) g(x) dx \right) (u, v)$$

y

$$\frac{\partial}{\partial v} \left(\operatorname{Re} \int_{\mathbb{R}^n} T_{a,z}^\epsilon f(x) g(x) dx \right) (u, v) = -\frac{\partial}{\partial u} \left(\operatorname{Im} \int_{\mathbb{R}^n} T_{a,z}^\epsilon f(x) g(x) dx \right) (u, v). \quad \square$$

El siguiente lema, de carácter técnico, será necesario para establecer una de las hipótesis del argumento de interpolación. Su demostración se presentará luego de finalizar la del Teorema 3.3.

Lema 3.6. Sean $0 < a < 1$ y $\epsilon > 0$. Entonces, existe una función a valores reales M_1 , que no depende de ϵ , tal que la desigualdad

$$\|(\tilde{K}_{a,1+iv}^\epsilon)^\wedge\|_{L^\infty} \leq M_1(v). \quad (3.16)$$

vale para cada $v \in \mathbb{R}$. Más aún, M_1 verifica la condición (1.7) del Teorema 1.32.

A continuación, procedemos a demostrar el resultado principal de esta sección.

Demostración del Teorema 3.3. Si $2 + a' < p'$, entonces $\theta = \frac{2}{p'}$ $\in S$. Por definición, notemos que

$$\tilde{K}_{a,\theta}^\epsilon(x) = \frac{e^{i\gamma|x|^{-a'}}}{|x|^{\frac{n(2+a')}{p'}}} \chi_{|x|>\epsilon}(x), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

En este caso, denotaremos $\tilde{K}_{a,\theta}^\epsilon = \tilde{K}_{a,p}^\epsilon$. Más aún, de (1.8) con $p_0 = 1$, $p_1 = 2$, $q_1 = \infty$ y $q_1 = 2$,

$$\frac{1}{p\theta} = \frac{1 - \frac{2}{p'}}{1} + \frac{\frac{2}{p'}}{2} = \frac{1}{p} \quad \text{y} \quad \frac{1}{q\theta} = \frac{\frac{2}{p'}}{2} = \frac{1}{p'}.$$

Nuestro primer objetivo será aplicar el [teorema de interpolación de Stein](#) para demostrar que existe una constante positiva $C = C(a, n)$ tal que la desigualdad

$$\|\tilde{K}_{a,p}^\epsilon * f\|_{L^{p'}} \leq C \|f\|_{L^p} \quad (3.17)$$

vale para toda $f \in L^p$.

En virtud del Lema 3.5, sabemos que $\{T_{a',z}^\epsilon\}_{z \in S}$ es una familia analítica de operadores de crecimiento admisible. Por consiguiente, para aplicar el [teorema de interpolación de Stein](#), solo nos resta probar que, para todo $v \in \mathbb{R}$ y toda $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ simple, se verifican las siguientes desigualdades de tipo fuerte

$$\|T_{a,iv}^\epsilon f\|_{L^\infty} \leq M_0(v) \|f\|_{L^1} \quad (3.18)$$

y

$$\|T_{a,1+iv}^\epsilon f\|_{L^2} \leq M_1(v) \|f\|_{L^2}, \quad (3.19)$$

donde M_0 y M_1 son funciones a valores reales que no dependen de ϵ y satisfacen la condición (1.7).

Comencemos con la demostración de (3.18). Por definición, y considerando la relación (3.12),

$$|\tilde{K}_{a,iv}^\epsilon(x)| = \left| \frac{e^{i\gamma|x|^{-a'}}}{|x|^{in(1+\frac{a'}{2})v}} \chi_{\{|x|>\epsilon\}}(x) \right| \leq 1.$$

Por lo tanto, $\|\tilde{K}_{a,iv}^\epsilon\|_{L^\infty} = 1$ para todo $\epsilon > 0$. Aplicando la [desigualdad de Young](#), se tiene que

$$\|T_{a,iv}^\epsilon f\|_{L^\infty} = \|\tilde{K}_{a,iv}^\epsilon * f\|_{L^\infty} \leq \|\tilde{K}_{a,z}^\epsilon\|_{L^\infty} \|f\|_{L^1} = \|f\|_{L^1}$$

Luego, tomando $M_0(v) = 1$, la condición (1.7) se satisface trivialmente, y (3.18) queda demostrada.

Ahora, veamos que (3.19) se cumple. Por definición, aplicando el inciso (b) de la Proposición 1.12 y el Teorema 1.13, se tiene que

$$\|T_{a,1+iv}^\epsilon f\|_{L^2} = \|\tilde{K}_{a,1+iv}^\epsilon * f\|_{L^2} = \|(\tilde{K}_{a,1+iv}^\epsilon)^\hat{f}\|_{L^2}.$$

En virtud del Lema 3.6 y recurriendo nuevamente al Teorema 1.13, obtenemos

$$\|T_{a,1+iv}^\epsilon f\|_{L^2} \leq \|(\tilde{K}_{a,1+iv}^\epsilon)\|_{L^\infty} \|\hat{f}\|_{L^2} \leq M_1(v) \|f\|_{L^2},$$

donde M_1 es una función real que satisface las propiedades requeridas. De este modo, se concluye la demostración de (3.19) y, en consecuencia, de (3.17).

A continuación, utilizaremos la condición $2 + a' < p'$ para demostrar que el límite $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \tilde{K}_{a,p}^\epsilon * f$ existe en el sentido de la norma $L^{p'}$. Esto es, el operador $\tilde{K}_{a,p} * f$ está bien definido como valor principal, y existe una constante positiva $C = C(a, n, p)$ tal que la desigualdad

$$\|\tilde{K}_{a,p} * f\|_{L^{p'}} \leq C \|f\|_{L^p}$$

vale para toda $f \in L^p$.

Sean $\eta > 0$ y $f \in L^p$. Dado que C_c^∞ es denso en L^p , descomponemos $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, donde $f_1 \in C_c^\infty$ y $\|f_2\|_{L^p} < \eta$. En consecuencia, por la completitud del espacio L^p , es suficiente probar que $\{\tilde{K}_{a,p}^\epsilon * f\}_{\epsilon > 0}$ es una familia de Cauchy en la norma $L^{p'}$.

Si $\epsilon_0 < \epsilon_1$, por la asociatividad del producto de convolución y la desigualdad triangular, obtenemos

$$\begin{aligned} \|\tilde{K}_{a,p}^{\epsilon_0} * f - \tilde{K}_{a,p}^{\epsilon_1} * f\|_{L^{p'}} &= \|\tilde{K}_{a,p}^{\epsilon_0} * (f_1 + f_2) - \tilde{K}_{a,p}^{\epsilon_1} * (f_1 + f_2)\|_{L^{p'}} \\ &\leq \|(\tilde{K}_{a,p}^{\epsilon_0} - \tilde{K}_{a,p}^{\epsilon_1}) * f_1\|_{L^{p'}} + \|\tilde{K}_{a,p}^{\epsilon_0} * f_2\|_{L^{p'}} + \|\tilde{K}_{a,p}^{\epsilon_1} * f_2\|_{L^{p'}}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Por definición,

$$\begin{aligned} \tilde{K}_{a,p}^{\epsilon_0}(x) - \tilde{K}_{a,p}^{\epsilon_1}(x) &= \frac{e^{i\gamma|x|^{-a'}}}{|x|^{\frac{n(2+a')}{p'}}} \chi_{\{|x| > \epsilon_0\}}(x) - \frac{e^{i\gamma|x|^{-a'}}}{|x|^{\frac{n(2+a')}{p'}}} \chi_{\{|x| > \epsilon_1\}}(x) \\ &= \frac{e^{i\gamma|x|^{-a'}}}{|x|^{\frac{n(2+a')}{p'}}} \chi_{\{\epsilon_0 < |x| < \epsilon_1\}}(x). \end{aligned}$$

Dado que $1 - \frac{2+a'}{p'} > 0$, haciendo un cambio de variables, resulta

$$\|\tilde{K}_{a,p}^{\epsilon_0} - \tilde{K}_{a,p}^{\epsilon_1}\|_{L^1} \lesssim \int_{\epsilon_0}^{\epsilon_1} r^{n(1-\frac{2+a'}{p'})-1} dr \approx r^{n(1-\frac{2+a'}{p'})} \Big|_{\epsilon_0}^{\epsilon_1} \lesssim \epsilon_1^{n(1-\frac{2+a'}{p'})}.$$

Luego, aplicando la [desigualdad de Young](#), se tiene que

$$\|(\tilde{K}_{a,p}^{\epsilon_0} - \tilde{K}_{a,p}^{\epsilon_1}) * f_1\|_{L^{p'}} \lesssim \|\tilde{K}_{a,p}^{\epsilon_0} - \tilde{K}_{a,p}^{\epsilon_1}\|_{L^1} \|f_1\|_{L^{p'}} \lesssim \epsilon_1^{n-\frac{n(a'+2)}{p'}} \|f_1\|_{L^{p'}}.$$

Por otro lado, de (3.17), obtenemos

$$\|\tilde{K}_{a,p}^{\epsilon_j} * f_2\|_{L^{p'}} \leq C \|f_2\|_{L^p} \leq C\eta, \quad j = 0, 1.$$

En consecuencia, al reemplazar en el lado derecho de (3.20), obtenemos

$$\|\tilde{K}_{a,p}^{\epsilon_0} f - \tilde{K}_{a,p}^{\epsilon_1} f\|_{L^{p'}} \lesssim \epsilon_1^{n-\frac{n(a'+2)}{p'}} \|f_1\|_{L^{p'}} + \eta,$$

que tiende a cero conforme $\epsilon_1, \eta \rightarrow 0$. Luego, $\{\tilde{K}_{a,p}^\epsilon * f\}_{\epsilon > 0}$ es una familia de Cauchy en la norma $L^{p'}$ y, por lo tanto, es convergente en la norma $L^{p'}$ a $\tilde{K}_{a,p} * f$. \square

3.1.1. Demostración de Lema 3.6

En este apartado, sin pérdida de generalidad y adoptando el enfoque propuesto por Sagun Chanillo en [2], presentaremos la demostración del Lema 3.6 para el caso $n = 1$. En dimensiones mayores, el

análisis puede reducirse a esta configuración, aunque surgen diferencias significativas en la definición de los parámetros y las regiones de integración. La correcta formulación de estos elementos requiere un dominio avanzado de técnicas de análisis asintótico que escapan los objetivos de esta tesina, por lo que nos limitaremos a trabajar en una dimensión.

Seguidamente, enunciamos el *lema de van der Corput*, cuya demostración se encuentra en [27].

Teorema 3.7 (Lema de van der Corput). *Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo abierto y $\Phi \in C^2(I)$ una función real.*

- (a) *Si Φ' es monótona sobre I y existe $\lambda > 0$ tal que $\Phi'(t) \geq \lambda$ o $\Phi'(t) \leq -\lambda$ para todo $t \in I$, entonces*

$$\left| \int_I e^{i\Phi(t)} dt \right| \leq \frac{C}{\lambda},$$

donde C es una constante positiva que no depende de Φ .

- (b) *Si existe $\rho > 0$ tal que $\Phi''(t) \geq \rho$ o $\Phi''(t) \leq -\rho$ para todo $t \in I$, entonces*

$$\left| \int_I e^{i\Phi(t)} dt \right| \leq \frac{C}{\rho^{1/2}},$$

donde C es una constante positiva que no depende de Φ .

A continuación, demostramos el resultado principal de este apartado.

Demostración del Lema 3.6. Sean $0 < a < 1$, $a' = \frac{a}{1-a}$, $\gamma = a^{a'} - a^{1+a'}$. Para $x \in \mathbb{R}$, consideremos la función

$$\tilde{K}_{a,1+iv}^\epsilon(x) = \frac{\exp i \left(\gamma |x|^{-a'} - \left(1 + \frac{a'}{2}\right) v \log |x| \right)}{|x|^{1+\frac{a'}{2}}} \chi_{\{|t|>\epsilon\}}(x),$$

donde $\epsilon > 0$ y $v \in \mathbb{R}$ es arbitrario. Demostraremos que existe una constante positiva $C = C(a)$ tal que se cumple la desigualdad

$$\|(\tilde{K}_{a,1+iv}^\epsilon)^\wedge\|_{L^\infty} \leq C \left(1 + |v|^{\frac{1}{2}}\right) = M_1(v). \quad (3.21)$$

Así, la función recién definida M_1 satisface la condición (1.7) del *teorema de interpolación de Stein*.

Sin pérdida de generalidad, supongamos que $\gamma = 1$. La demostración para el caso general se obtiene mediante un cambio de coordenadas. Definimos

$$\delta = \min \left\{ \left(\frac{1}{a'}\right)^{\frac{1}{a'}}, \left(\frac{3}{2a'}\right)^{\frac{1}{1+a'}} \right\}.$$

Además, supongamos que $0 < \epsilon < \frac{1}{\delta}$. En consecuencia,

$$\begin{aligned} \tilde{K}_{a,1+iv}^\epsilon(x) &= \frac{\exp i \left(|x|^{-a'} - \left(1 + \frac{a'}{2}\right) v \log |x| \right)}{|x|^{1+\frac{a'}{2}}} \chi_{\{\epsilon < |x| < \frac{1}{\delta}\}}(x) \\ &+ \frac{\exp i \left(|x|^{-a'} - \left(1 + \frac{a'}{2}\right) v \log |x| \right)}{|x|^{1+\frac{a'}{2}}} \chi_{\{|x| \geq \frac{1}{\delta}\}}(x) = f(x) + g(x). \end{aligned}$$

Como consecuencia de la desigualdad triangular, es suficiente demostrar que la estimación (3.21) se cumple para cada una de las funciones recién definidas.

Por un lado, tenemos que

$$\|g\|_{L^1} = \int_{\{|x| \geq \frac{1}{\delta}\}} \frac{dx}{|x|^{1+\frac{a'}{2}}} = 2 \int_{\frac{1}{\delta}}^{\infty} \frac{dr}{r^{1+\frac{a'}{2}}} = \lim_{k \rightarrow \infty} 2 \int_{\frac{1}{\delta}}^k \frac{dr}{r^{1+\frac{a'}{2}}} = C < \infty,$$

donde $C = C(a)$ es una constante positiva. Por lo tanto, considerando el inciso (e) de la Proposición 1.12, obtenemos $\|\hat{g}\|_{L^\infty} \leq \|g\|_{L^1} = C$.

Para la estimación de $\|\hat{f}\|_{L^\infty}$, por definición, se tiene que

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ix\xi} dx = \int_{\{\epsilon < |x| \leq \frac{1}{\delta}\}} \frac{\exp i \left(|x|^{-a'} - \left(1 + \frac{a'}{2}\right) v \log |x| - x\xi \right)}{|x|^{1+\frac{a'}{2}}} dx.$$

Sean $x = \frac{1}{t}$, $N = \frac{1}{\epsilon}$ y $\tilde{v} = \left(1 + \frac{a'}{2}\right)$. Considerando que $-\tilde{v} \log \left|\frac{1}{t}\right| = \tilde{v} \log |t|$, obtenemos

$$\begin{aligned} \hat{f}(\xi) &= \int_{\{\delta < |t| < N\}} \exp i \left(|t|^{a'} + \tilde{v} \log |t| - \frac{\xi}{t} \right) |t|^{1+\frac{a'}{2}} \left| -\frac{1}{t^2} \right| dt \\ &= \int_{\{\delta < |t| < N\}} \frac{\exp i \left(|t|^{a'} + \tilde{v} \log |t| - \frac{\xi}{t} \right)}{|t|^{1-\frac{a'}{2}}} dt. \end{aligned}$$

Nos enfocaremos en el caso en que $t > 0$. Dado que consideraremos $\xi \in \mathbb{R}$, el análisis también abarca el caso en que $t < 0$. Procedemos entonces a estimar

$$\int_{\delta}^N \frac{\exp i \left(t^{a'} + \tilde{v} \log t - \frac{\xi}{t} \right)}{t^{1-\frac{a'}{2}}} dt = \int_{\delta}^N \frac{e^{i\Phi(t)}}{t^{1-\frac{a'}{2}}} dt, \quad (3.22)$$

donde $\Phi(t) = t^{a'} + \tilde{v} \log t - \frac{\xi}{t}$.

Sea $\eta > 0$ el parámetro definido en (2.10). La estimación de (3.22) se consigue separando el análisis en dos casos.

Caso 1. Supongamos que $|\xi| \geq \max \left\{ 1, \left(\frac{\eta|\tilde{v}|}{a'} \right)^{\frac{1+a'}{a'}} \right\}$. Sea $t_0 = \left(\frac{3|\xi|}{2a'} \right)^{\frac{1}{1+a'}}$. Si $t_0 < N$ dividimos (3.22) como sigue

$$\int_{\delta}^{t_0} \frac{e^{i\Phi(t)}}{t^{1-\frac{a'}{2}}} dt + \int_{t_0}^N \frac{e^{i\Phi(t)}}{t^{1-\frac{a'}{2}}} dt = I + II.$$

Si $N \leq t_0$, solo consideramos

$$\int_{\delta}^N \frac{e^{i\Phi(t)}}{t^{1-\frac{a'}{2}}} dt = III.$$

Dado que $a' > 0$ y $|\xi| \geq 1$, tenemos que

$$\delta = \min \left\{ \left(\frac{1}{a'} \right)^{\frac{1}{a'}}, \left(\frac{3}{2a'} \right)^{\frac{1}{1+a'}} \right\} \leq \left(\frac{3}{2a'} \right)^{\frac{1}{1+a'}} \leq \left(\frac{3|\xi|}{2a'} \right)^{\frac{1}{1+a'}} = t_0.$$

Las estimaciones para I y III son similares y las abordaremos primero considerando dos casos.

Caso 1.1. Supongamos que $\xi \geq 0$. Integrando I por partes,

$$\begin{aligned} I &= \int_{\delta}^{t_0} \left(-\frac{i}{t^{1-\frac{a'}{2}} \Phi'(t)} \right) (i\Phi'(t)e^{i\Phi(t)}) dt \\ &= -\frac{ie^{i\Phi(t)}}{t^{1-\frac{a'}{2}} \Phi'(t)} \Bigg|_{\delta}^{t_0} - \int_{\delta}^{t_0} e^{i\Phi(t)} \left[-i \left(-1 + \frac{a'}{2} \right) \frac{1}{t^{2-\frac{a'}{2}} \Phi'(t)} + i \frac{\Phi''(t)}{t^{1-\frac{a'}{2}} (\Phi'(t))^2} \right] dt \\ &= -\frac{ie^{i\Phi(t)}}{t^{1-\frac{a'}{2}} \Phi'(t)} \Bigg|_{\delta}^{t_0} + i \left(-1 + \frac{a'}{2} \right) \int_{\delta}^{t_0} \frac{e^{i\Phi(t)}}{t^{2-\frac{a'}{2}} \Phi'(t)} dt - i \int_{\delta}^{t_0} \frac{e^{i\Phi(t)} \Phi''(t)}{t^{1-\frac{a'}{2}} (\Phi'(t))^2} dt \\ &= I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned} \tag{3.23}$$

En virtud del inciso (a) de la Proposición 2.7, existe una constante positiva C tal que la desigualdad

$$|\Phi'(t)| \geq C \frac{|\xi|}{t^2}, \tag{3.24}$$

vale para todo $t \in [\delta, t_0]$. Utilizaremos este hecho para estimar $|I|$.

En primer lugar, aplicando la desigualdad triangular y la estimación (3.24), se tiene que

$$|I_1| \leq \frac{C}{|\Phi'(\delta)|} + \frac{1}{t_0^{1-\frac{a'}{2}} |\Phi'(t_0)|} \leq \frac{C}{|\xi|} + \frac{C}{|\xi|} t_0^{1+\frac{a'}{2}} \leq C + \frac{C}{|\xi|} t_0^{1+\frac{a'}{2}},$$

donde la última estimación se obtiene de considerar $|\xi| \geq 1$. Sustituyendo $t_0 = \left(\frac{3|\xi|}{2a'} \right)^{\frac{1}{1+a'}}$ en el segundo sumando de la desigualdad anterior, obtenemos

$$\frac{C}{|\xi|} t_0^{1+\frac{a'}{2}} = \frac{C}{|\xi|} \left(\frac{3|\xi|}{2a'} \right)^{\frac{2+a'}{2(1+a')}} = \frac{C}{|\xi|^{\frac{a'}{2(1+a')}}} \leq C. \tag{3.25}$$

En consecuencia, $|I_1| \leq C$.

Para I_2 , aplicando la estimación (3.24) y considerando que a' y δ son positivos, obtenemos

$$|I_2| \leq C \int_{\delta}^{t_0} \frac{1}{t^{2-\frac{a'}{2}} |\Phi'(t)|} dt \leq \frac{C}{|\xi|} \int_{\delta}^{t_0} t^{\frac{a'}{2}} dt = \frac{C}{|\xi|} \left(t^{1+\frac{a'}{2}} \Big|_{\delta}^{t_0} \right) \leq \frac{C}{|\xi|} t_0^{1+\frac{a'}{2}}.$$

Sustituyendo el valor de t_0 en el lado derecho de la estimación anterior y procediendo como en (3.25) resulta $|I_2| \leq C$.

Teniendo en cuenta que $a' > 0$, por la definición de Φ , está claro que

$$|\Phi''(t)| = \left| a'(a' - 1)t^{a'-2} - \frac{\tilde{v}}{t^2} - \frac{2\xi}{t^3} \right| \leq a'|a' - 1|t^{a'-2} + \frac{|\tilde{v}|}{t^2} + \frac{2|\xi|}{t^3} \leq C \left(t^{a'-2} + \frac{|\tilde{v}|}{t^2} + \frac{|\xi|}{t^3} \right), \quad (3.26)$$

donde $C = \max\{2, a'|a' - 1|\}$. En consecuencia, aplicando esta estimación junto con (3.24), obtenemos

$$\begin{aligned} |I_3| &\leq \int_{\delta}^{t_0} \frac{|\Phi''(t)|}{t^{1-\frac{a'}{2}}|\Phi'(t)|^2} dt \leq \frac{C}{|\xi|^2} \int_{\delta}^{t_0} t^{3+\frac{a'}{2}} \left(t^{a'-2} + \frac{|\tilde{v}|}{t^2} + \frac{|\xi|}{t^3} \right) dt \\ &= \frac{C}{|\xi|^2} \int_{\delta}^{t_0} t^{1+\frac{3a'}{2}} + |\tilde{v}|t^{1+\frac{a'}{2}} + |\xi|t^{\frac{a'}{2}} dt. \end{aligned}$$

Dado que $t \leq t_0$, se cumple que $t|\tilde{v}| \leq C|\xi|$. En consecuencia,

$$|I_3| \leq \frac{C}{|\xi|^2} \int_{\delta}^{t_0} t^{1+\frac{3a'}{2}} dt + \frac{C}{|\xi|} \int_{\delta}^{t_0} t^{\frac{a'}{2}} dt.$$

Procediendo como en la estimación de $|I_2|$, el segundo sumando de la desigualdad anterior se controla por una constante. Por otro lado, considerando que a' y δ son positivos, y sustituyendo $t_0 = \left(\frac{3|\xi|}{2a'}\right)^{\frac{1}{1+a'}}$, obtenemos

$$\frac{C}{|\xi|^2} \int_{\delta}^{t_0} t^{1+\frac{3a'}{2}} dt = \frac{C}{|\xi|^2} \left(t^{2+\frac{3a'}{2}} \Big|_{\delta}^{t_0} \right) \leq \frac{C}{|\xi|^2} t_0^{2+\frac{3a'}{2}} = \frac{C}{|\xi|^2} \left(\frac{3|\xi|}{2a'} \right)^{\frac{4+3a'}{2(1+a')}} = \frac{C}{|\xi|^{\frac{a'}{2(1+a')}}} \leq C,$$

donde la última estimación se obtiene de considerar $|\xi| \geq 1$. Por lo tanto, $|I_3| \leq C$.

En resumen,

$$|I| \leq |I_1| + |I_2| + |I_3| \leq C.$$

La estimación para $|III|$ se obtiene de forma similar, reemplazando t_0 por N en cada caso.

Caso 1.2. Supongamos que $\xi \leq 0$. Definimos $\zeta(u) = \int_{\delta}^u e^{i\Phi(t)} dt$. Integrando I por partes,

$$\begin{aligned} I &= \int_{\delta}^{t_0} \frac{e^{i\Phi(t)}}{t^{1-\frac{a'}{2}}} dt = \int_{\delta}^{t_0} \frac{1}{t^{1-\frac{a'}{2}}} \zeta'(t) dt \\ &= \frac{\zeta(t)}{t^{1-\frac{a'}{2}}} \Big|_{\delta}^{t_0} - \left(-1 + \frac{a'}{2} \right) \int_{\delta}^{t_0} \frac{\zeta(t)}{t^{2-\frac{a'}{2}}} dt = I_1 + I_2. \end{aligned}$$

En virtud del inciso (b) de la Proposición 2.7, la desigualdad $|\Phi''(u)| \geq C \frac{|\xi|}{u^3}$ vale para todo $u \in [\delta, t_0]$.

En consecuencia, por el lema de van der Corput, obtenemos

$$|\zeta(u)| \leq C \frac{|u|^{\frac{3}{2}}}{|\xi|^{\frac{1}{2}}}, \quad (3.27)$$

para $u \in [\delta, t_0]$. Utilizaremos este hecho para estimar $|I|$.

En primer lugar, considerando que $|\zeta(\delta)| = 0$, aplicando la estimación (3.27) y la definición de t_0 , tenemos que

$$|I_1| \leq \frac{|\zeta(t_0)|}{t_0^{1-\frac{a'}{2}}} \leq \frac{C}{|\xi|^{\frac{1}{2}}} t_0^{\frac{1+a'}{2}} = \frac{C}{|\xi|^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{3|\xi|}{2a'} \right)^{\frac{1+a'}{2(1+a')}} = C.$$

Para I_2 , aplicando (3.27), obtenemos

$$|I_2| \leq C \int_{\delta}^{t_0} \frac{|\zeta(t)|}{t^{2-\frac{a'}{2}}} dt \leq \frac{C}{|\xi|^{\frac{1}{2}}} \int_{\delta}^{t_0} t^{\frac{a'}{2}-\frac{1}{2}} dt.$$

Considerando que a' y δ son positivos, y sustituyendo $t_0 = \left(\frac{3|\xi|}{2a'} \right)^{\frac{1}{1+a'}}$, resulta

$$\frac{C}{|\xi|^{\frac{1}{2}}} \int_{\delta}^{t_0} t^{\frac{a'}{2}-\frac{1}{2}} dt = \frac{C}{|\xi|^{\frac{1}{2}}} \left(t^{\frac{1+a'}{2}} \Big|_{\delta}^{t_0} \right) \leq \frac{C}{|\xi|^{\frac{1}{2}}} t_0^{\frac{1+a'}{2}} = \frac{C}{|\xi|^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{3|\xi|}{2a'} \right)^{\frac{1+a'}{2(1+a')}} = C.$$

En resumen,

$$|I| \leq |I_1| + |I_2| \leq C.$$

La estimación para $|III|$ se obtiene de forma similar, reemplazando t_0 por N en cada caso.

Si $N \leq t_0$, entonces $|\hat{f}(\xi)| = |III| \leq C$, donde $C = C(a)$ es una constante positiva. En consecuencia, se cumple que $\|\hat{f}\|_{L^\infty} \leq C$. Por lo tanto,

$$\|(\tilde{K}_{a,1+iv}^\epsilon)^\wedge\|_{L^\infty} \leq \|\hat{f}\|_{L^\infty} + \|\hat{g}\|_{L^\infty} \leq C.$$

Si $t_0 < N$, solo nos resta estimar $|II|$. Integrando por partes como en (3.23),

$$\begin{aligned} II &= -\frac{ie^{i\Phi(t)}}{t^{1-\frac{a'}{2}}\Phi'(t)} \Big|_{t_0}^N + i \left(-1 + \frac{a'}{2} \right) \int_{t_0}^N \frac{e^{i\Phi(t)}}{t^{2-\frac{a'}{2}}\Phi'(t)} dt - i \int_{t_0}^N \frac{e^{i\Phi(t)}\Phi''(t)}{t^{1-\frac{a'}{2}}(\Phi'(t))^2} dt \\ &= II_1 + II_2 + II_3. \end{aligned}$$

En virtud de la Proposición 2.8, la desigualdad

$$|\Phi'(t)| \geq Ct^{b-1}, \tag{3.28}$$

vale para todo $t \in (t_0, N)$. Utilizaremos (3.28) para estimar $|II|$.

En primer lugar, aplicando la desigualdad triangular y considerando que $t_0 < N$ junto con la estimación (3.28), obtenemos

$$|II_1| \leq \frac{1}{N^{1-\frac{a'}{2}}|\Phi'(N)|} + \frac{1}{t_0^{1-\frac{a'}{2}}|\Phi'(t_0)|} \leq \frac{C}{N^{\frac{a'}{2}}} + \frac{C}{t_0^{\frac{a'}{2}}} \leq \frac{C}{t_0^{\frac{a'}{2}}}. \tag{3.29}$$

Sustituyendo $t_0 = \left(\frac{3|\xi|}{2a'}\right)^{\frac{1}{1+a'}}$, resulta

$$|II_1| \leq \frac{C}{t_0^{\frac{a'}{2}}} = C \left(\frac{3|\xi|}{2a'}\right)^{-\frac{a'}{2(1+a')}} \leq C, \quad (3.30)$$

donde la última estimación se obtiene de considerar $|\xi| \geq C$.

Para II_2 , aplicando la estimación (3.28), obtenemos

$$\begin{aligned} |II_2| &\leq C \int_{t_0}^N \frac{1}{t^{2-\frac{a'}{2}} |\Phi'(t)|} dt \leq C \int_{t_0}^N \frac{1}{t^{1+\frac{a'}{2}}} dt \\ &\leq C \int_{t_0}^{\infty} \frac{1}{t^{1+\frac{a'}{2}}} dt = C \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{t_0}^k \frac{1}{t^{1+\frac{a'}{2}}} dt = C \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{t^{\frac{a'}{2}}} \Big|_{t_0}^k = \frac{C}{t_0^{\frac{a'}{2}}}. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Sustituyendo el valor de t_0 en el lado derecho de la estimación anterior y procediendo como en (3.30),

$$|II_2| \leq C.$$

Aplicando la estimación (3.26) para $|\Phi''(t)|$ y (3.28), se tiene que

$$\begin{aligned} |II_3| &\leq C \int_{t_0}^N \frac{|\Phi''(t)|}{t^{1-\frac{a'}{2}} |\Phi'(t)|^2} dt \leq C \int_{t_0}^N t^{1-\frac{3a'}{2}} \left(t^{a'-2} + \frac{|\tilde{v}|}{t^2} + \frac{|\xi|}{t^3} \right) dt \\ &= C \int_{t_0}^N \frac{1}{t^{1+\frac{a'}{2}}} dt + C \int_{t_0}^N \frac{1}{t^{\frac{3a'}{2}}} \left(\frac{|\tilde{v}|}{t} + \frac{|\xi|}{t^2} \right) dt. \end{aligned}$$

Procediendo como en la estimación de $|II_2|$, el primer sumando de la desigualdad anterior se controla por una constante. Por otro lado, dado que el integrando es positivo, el término restante se puede controlar por

$$\begin{aligned} C \int_{t_0}^{\infty} \frac{1}{t^{\frac{3a'}{2}}} \left(\frac{|\tilde{v}|}{t} + \frac{|\xi|}{t^2} \right) dt &= C \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{t_0}^k \frac{1}{t^{\frac{3a'}{2}}} \left(\frac{|\tilde{v}|}{t} + \frac{|\xi|}{t^2} \right) dt \\ &= C \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|\tilde{v}|}{t^{\frac{3a'}{2}}} \Big|_{t_0}^k + C \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|\xi|}{t^{1+\frac{3a'}{2}}} \Big|_{t_0}^k = C \frac{|\tilde{v}|}{t_0^{\frac{3a'}{2}}} + C \frac{|\xi|}{t_0^{1+\frac{3a'}{2}}}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

En virtud de la Proposición 2.6, sabemos que $|\tilde{v}| \leq C|\xi|^{\frac{a'}{1+a'}}$. Aplicando esta estimación y sustituyendo $t_0 = \left(\frac{3|\xi|}{2a'}\right)^{\frac{1}{1+a'}}$, obtenemos

$$C \frac{|\tilde{v}|}{t_0^{\frac{3a'}{2}}} + C \frac{|\xi|}{t_0^{1+\frac{3a'}{2}}} \leq C |\xi|^{\frac{a'}{1+a'}} \left(\frac{3|\xi|}{2a'}\right)^{-\frac{3a'}{2(1+a')}} + C |\xi| \left(\frac{3|\xi|}{2a'}\right)^{-\frac{2+3a'}{2(1+a')}} = \frac{C}{|\xi|^{\frac{a'}{2(1+a')}}} \leq C,$$

donde la última estimación se obtiene de considerar $|\xi| \geq C$. Por lo tanto, $|II_3| \leq C$.

Luego, $|II| \leq C$.

Si $t_0 < N$, entonces $|\hat{f}(\xi)| = |I| + |II| \leq C$, donde $C = C(a)$ es una constante positiva. En consecuencia, se cumple que $\|\hat{f}\|_{L^\infty} \leq C$. Por lo tanto,

$$\|(\tilde{K}_{a,1+iv}^\epsilon)\hat{\cdot}\|_{L^\infty} \leq \|\hat{f}\|_{L^\infty} + \|\hat{g}\|_{L^\infty} \leq C.$$

A continuación, desarrollaremos el caso restante.

Caso 2. Supongamos que $|\xi| \leq \max\left\{1, \left(\frac{\eta|\tilde{v}|}{a'}\right)^{\frac{1+a'}{a'}}\right\}$. Sean $\omega > 1$ el parámetro definido en (2.11)

y $t_0 = \max\left\{\left(\frac{\omega}{a'}\right)^{\frac{1}{a'}}, \left(\frac{\eta\omega|\tilde{v}|}{(a')^2}\right)^{\frac{1}{a'}}\right\}$. Dado que $a' > 0$ y $\omega > 1$, se tiene que

$$\delta = \min\left\{\left(\frac{1}{a'}\right)^{\frac{1}{a'}}, \left(\frac{3}{2a'}\right)^{\frac{1}{1+a'}}\right\} \leq \left(\frac{1}{a'}\right)^{\frac{1}{a'}} < \left(\frac{\omega}{a'}\right)^{\frac{1}{a'}} \leq t_0.$$

Si $t_0 < N$ dividimos (3.22) en I y II como antes y si $N \leq t_0$, consideramos solo III .

En primer lugar, considerando que $a' > 0$ y $\delta \leq t_0$, se tiene que

$$|I| \leq \int_\delta^{t_0} \frac{dt}{t^{1-\frac{a'}{2}}} = C t^{\frac{a'}{2}} \Big|_\delta^{t_0} \leq C t_0^{\frac{a'}{2}} + C \delta^{\frac{a'}{2}} \leq C t_0^{\frac{a'}{2}}.$$

Si $t_0 = \left(\frac{\omega}{a'}\right)^{\frac{1}{a'}}$, está claro que $|I| \leq C$. Por otro lado, si $t_0 = \left(\frac{\eta\omega|\tilde{v}|}{(a')^2}\right)^{\frac{1}{a'}}$, obtenemos

$$|I| \leq C t_0^{\frac{a'}{2}} = C \left(\frac{\eta\omega|\tilde{v}|}{(a')^2}\right)^{\frac{1}{2}} = C |\tilde{v}|^{\frac{1}{2}}.$$

La estimación para $|III|$ se obtiene de forma similar, reemplazando t_0 por N en cada caso.

Si $N \leq t_0$, entonces $|\hat{f}(\xi)| = |III| \leq C |\tilde{v}|^{\frac{1}{2}}$, donde $C = C(a)$ es una constante positiva. En consecuencia, se cumple que $\|\hat{f}\|_{L^\infty} \leq C |\tilde{v}|^{\frac{1}{2}}$. Por lo tanto,

$$\|(\tilde{K}_{a,1+iv}^\epsilon)\hat{\cdot}\|_{L^\infty} \leq \|\hat{f}\|_{L^\infty} + \|\hat{g}\|_{L^\infty} \leq C(1 + |\tilde{v}|^{\frac{1}{2}}).$$

Si $t_0 < N$, solo nos resta estimar $|II|$. Integrando por partes como en (3.23),

$$\begin{aligned} II &= -\frac{ie^{i\Phi(t)}}{t^{1-\frac{a'}{2}}\Phi'(t)} \Big|_{t_0}^N + i\left(-1 + \frac{a'}{2}\right) \int_{t_0}^N \frac{e^{i\Phi(t)}}{t^{2-\frac{a'}{2}}\Phi'(t)} dt - i \int_{t_0}^N \frac{e^{i\Phi(t)}\Phi''(t)}{t^{1-\frac{a'}{2}}(\Phi'(t))^2} dt \\ &= II_1 + II_2 + II_3. \end{aligned}$$

En virtud de la Proposición 2.9, la estimación (3.28) para $|\phi'(t)|$ del caso anterior vale para todo $t \in (t_0, N)$. Utilizaremos este hecho para estimar II . Aplicando (3.29), (3.31) y (3.32), tenemos que

$$|II| \leq |II_1| + |II_2| + |II_3| \leq \frac{C}{t_0^{\frac{a'}{2}}} + C \frac{|\tilde{v}|}{t_0^{\frac{3a'}{2}}} + C \frac{|\xi|}{t_0^{1+\frac{3a'}{2}}}.$$

Usando que $t_0 \geq \left(\frac{\omega}{a'}\right)^{\frac{1}{a'}}$ en el primer sumando de la desigualdad anterior, obtenemos

$$\frac{C}{t_0^{\frac{a'}{2}}} \leq C \left(\frac{\omega}{a'}\right)^{-\frac{1}{2}} = C.$$

Por otro lado, aplicando convenientemente las estimaciones para t_0 y considerando que, por hipótesis, $|\xi| \leq C$, tenemos que

$$C \frac{|\tilde{v}|}{t_0^{\frac{3a'}{2}}} + C \frac{|\xi|}{t_0^{1+\frac{3a'}{2}}} = C \frac{|\tilde{v}|}{t_0^{a'}} \left(\frac{1}{t_0^{\frac{a'}{2}}}\right) + C \frac{|\xi|}{t_0^{1+\frac{3a'}{2}}} \leq C |\tilde{v}| \left(\frac{\eta\omega|\tilde{v}|}{(a')^2}\right)^{-1} \left(\frac{\omega}{a'}\right)^{-\frac{1}{2}} + C \left(\frac{\omega}{a'}\right)^{-\frac{2+3a'}{2a'}} = C.$$

Por lo tanto, $|II| \leq C$.

Si $t_0 < N$, entonces $|\hat{f}(\xi)| = |I| + |II| \leq C|\tilde{v}|^{\frac{1}{2}} + C$, donde $C = C(a)$ es una constante positiva.

En consecuencia, se cumple que $\|\hat{f}\|_{L^\infty} \leq C \left(1 + |\tilde{v}|^{\frac{1}{2}}\right)$. Por lo tanto,

$$\|(\tilde{K}_{a,1+iv}^\epsilon)\hat{f}\|_{L^\infty} \leq \|\hat{f}\|_{L^\infty} + \|\hat{g}\|_{L^\infty} \leq C \left(1 + |\tilde{v}|^{\frac{1}{2}}\right). \quad \square$$

Capítulo 4

Acotación L^∞ en BMO con pesos para operadores fuertemente singulares

Análogamente a lo que ocurre en el caso de las integrales singulares, se sabe que los operadores fuertemente singulares mapean L^∞ en BMO . Este resultado fue establecido por C. Fefferman y E. M. Stein en [11] y extendido por L. De-Michele e I. R. Inglis en [8], así como por J. Álvarez y M. Milman en [28], considerando distintas definiciones generalizadas de estos operadores. En lo que sigue, exploraremos versiones con pesos de estos resultados que, hasta donde sabemos, no han sido documentadas en la literatura. Para ello, introducimos una versión ponderada del espacio BMO , cuya definición puede encontrarse, por ejemplo, en [21].

Si w es un peso, el *espacio* $BMO(w)$ se define como el conjunto de funciones $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ que satisfacen

$$\|f\|_{BMO(w)} = \sup_Q \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x) - f_Q| dx \right) \left\| \frac{1}{w} \chi_Q \right\|_{L^\infty} < \infty,$$

donde f_Q denota el promedio de f sobre el cubo Q .

Observación 4.1. Si $w \equiv 1$, entonces $BMO(w)$ coincide con BMO , el espacio clásico de funciones de oscilación media acotada (véase, por ejemplo, [9]).

4.1. Un resultado de suficiencia para los operadores fuertemente singulares $K_a * f$ y T_a

En esta sección, aplicaremos las nociones adquiridas para demostrar el siguiente resultado.

Teorema 4.2. Sean $0 < a < 1$ y $w \in A_1$. Entonces, existe una constante positiva $C = C(a, n, [w]_{A_1})$ tal que la desigualdad

$$\|K_a * f\|_{BMO(w)} \leq C \left\| \frac{f}{w} \right\|_{L^\infty}$$

vale para toda $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ medible con $\frac{f}{w} \in L^\infty$.

Seguiremos un enfoque similar al de la demostración del Lema 3.4. No obstante, el lema técnico que se presenta a continuación nos permitirá simplificar el argumento, en línea con lo considerado por J. García-Cuerva et al. en [13].

Lema 4.3. Sean $0 < a < 1$ y w un peso tal que $Mw(x) < \infty$ en c.t.p. $x \in \mathbb{R}^n$. Entonces, existe una constante positiva $C = C(a, n)$ tal que la desigualdad

$$\int_{\{|x| > 2|y|^{1-a}\}} |K_a(x-y) - K_a(x)| w(x) dx \leq CMw(y) \quad (4.1)$$

vale en c.t.p. $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ con $|y| \leq 1$.

Demostración. Sea $x, y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tales que $|x| > 2|y|^{1-a}$ y $|y| \leq 1$. Dado que $0 < a < 1$, entonces $|x| > 2|y|^{1-a} \geq 2|y|$. En consecuencia,

$$\frac{|x|}{2} < |x| - |y| \leq |x - y| \leq |x| + |y| < \frac{3}{2}|x|. \quad (4.2)$$

Recordemos que, por definición,

$$|K_a(x-y) - K_a(x)| = \left| \frac{e^{i\gamma|x-y|^{-a'}}}{|x-y|^n} \chi_{\{|x-y| \leq 1\}}(x-y) - \frac{e^{i\gamma|x|^{-a'}}}{|x|^n} \chi_{\{|x| \leq 1\}}(x) \right|,$$

donde $a' = \frac{a}{1-a}$ y $\gamma = a^{a'} - a^{1+a'}$.

Dividiremos el análisis en casos según si las funciones características toman el valor 0 o 1.

Caso 1. Supongamos que $|x-y| \leq 1$ y $|x| > 1$. En este caso, la desigualdad (4.2) implica que $\frac{1}{2} < |x-y| \leq 1$. Luego,

$$\int_{\{|x| > 2|y|^{1-a}\}} |K_a(x-y) - K_a(x)| w(x) dx \leq \int_{\{\frac{1}{2} < |x-y| \leq 1\}} \frac{w(x)}{|x-y|^n} \leq 2^n \int_{B(y,1)} w(x) dx.$$

Sea Q el cubo centrado en y con $l(Q) = 2$. En virtud de la Proposición 1.1, se tiene que $B(y, 1) \subseteq Q$.

Por lo tanto,

$$\int_{\{|x| > 2|y|^{1-a}\}} |K_a(x-y) - K_a(x)| w(x) dx \leq \frac{4^n}{|Q|} \int_Q w(x) dx \leq 4^n Mw(y).$$

Caso 2. Supongamos que $|x - y| > 1$ y $|x| \leq 1$. A partir de (4.2), es fácil ver que $\frac{1}{|x|^n} \leq \left(\frac{3}{2}\right)^n$.

En consecuencia,

$$\int_{\{|x|>2|y|^{1-a}\}} |K_a(x - y) - K_a(x)| w(x) dx \leq \int_{\{1 \geq |x| > 2|y|^{1-a}\}} \frac{w(x)}{|x|^n} dx \leq \left(\frac{3}{2}\right)^n \int_{B(0,1)} w(x) dx.$$

Sea Q el cubo centrado en 0 con $l(Q) = 2$. Luego, $y \in B(0, 1) \subseteq Q$ y, por consiguiente,

$$\int_{\{|x|>2|y|^{1-a}\}} |K_a(x - y) - K_a(x)| w(x) dx \leq \frac{3^n}{|Q|} \int_Q w(x) dx \leq 3^n M w(y).$$

Caso 3. Supongamos que $|x - y| \leq 1$ y $|x| \leq 1$. En virtud de la Proposición 2.1, resulta

$$|K_a(x - y) - K_a(x)| \leq C \frac{|y|}{|x|^{(n+1)+a'}},$$

donde $C = C(a, n)$ es una constante positiva. De este modo,

$$\begin{aligned} \int_{\{|x|>2|y|^{1-a}\}} |K_a(x - y) - K_a(x)| w(x) dx &\lesssim |y| \int_{\{|x|>2|y|^{1-a}\}} \frac{w(x)}{|x|^{(n+1)+a'}} dx \\ &\lesssim |y| \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\{2^{k+1}|y|^{1-a} \leq |x| \leq 2^{k+2}|y|^{1-a}\}} \frac{w(x)}{|x|^{(n+1)+a'}} dx. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Sea Q el cubo centrado en 0 con $l(Q) = |y|^{1-a}$. Teniendo en cuenta que $y \in B(0, 2^{k+2}|y|^{1-a}) \subseteq 2^{k+3}Q$ y la relación $1 = (1 - a)(1 + a')$, obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{\{|x|>2|y|^{1-a}\}} |K_a(x - y) - K_a(x)| w(x) dx &\lesssim |y| \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\{|x| \approx 2^k |y|^{1-a}\}} \frac{1}{|x|^{1+a'}} \left(\frac{w(x)}{|x|^n} \right) dx \\ &\lesssim |y| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{-k(1+a')}}{|y|} \left(\frac{1}{|2^{k+3}Q|} \int_{2^{k+3}Q} w(x) dx \right) \\ &\lesssim M w(y). \end{aligned} \quad \square$$

Observación 4.4. Si $w \equiv 1$, la expresión (4.1) corresponde a la condición de regularidad para operadores fuertemente singulares, formulada por C. Fefferman en [10].

Observación 4.5. En virtud de la Proposición 1.2 y de la definición del núcleo K_a , con ligeras modificaciones, se puede establecer que existe una constante positiva $C = C(a, n)$ tal que la desigualdad

$$\int_{\{|x_0 - x| > 2|x_0 - y|^{1-a}\}} |K_a(x - y) - K_a(x_0 - x)| w(x) dx \leq C M w(y)$$

vale en c.t.p. $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{x_0\}$ con $|x_0 - y| \leq 1$.

Observación 4.6. Si $w \in A_1$, entonces $Mw(x) \leq Cw(x)$ en c.t.p. $x \in \mathbb{R}^n$. De este modo, podemos reemplazar Mw por w en la estimación (4.1), con $C = C(a, n, [w]_{A_1})$.

Seguidamente, probamos que el operador fuertemente singular $K_a * f$ define una aplicación acotada de L^∞ en BMO con respecto a pesos en la clase A_1 .

Demostración del Teorema 4.2. Dado que $w \in A_1$, en virtud del inciso (a) del Teorema 1.36, existe $s_0 > 1$ tal que $w \in RH_{s_0}$. Por otro lado, si $0 < a < 1$, podemos hallar $s_1 > 1$ de modo que $2 + a' < s_1'$. Luego, tomando $s = \min\{s_0, s_1\}$, ambas condiciones se verifican simultáneamente. Observemos que, si $\frac{f}{w} \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ y Q es un cubo, entonces

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)\chi_Q(x)|^s dx \right)^{\frac{1}{s}} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{f(x)}{w(x)} \right|^s w(x)^s dx \right)^{\frac{1}{s}} \leq \left(\int_Q w(x)^s dx \right)^{\frac{1}{s}} \left\| \frac{f}{w} \right\|_{L^\infty} < \infty,$$

en virtud de que $w \in RH_s$.

Recordemos que, si $w \in A_1$, se cumple

$$\sup_Q \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w(x) dx \right) \left\| \frac{1}{w} \chi_Q \right\|_{L^\infty} < \infty.$$

Para obtener la estimación deseada, probaremos que la desigualdad

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q |K_a * f(x) - (K_a * f)_Q| dx \lesssim \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w(x) dx \right) \left\| \frac{f}{w} \right\|_{L^\infty} \quad (4.4)$$

vale para todo cubo Q centrado en c_Q con lados de longitud $l(Q)$.

Caso 1. Supongamos que $\sqrt{n}l(Q) \leq 1$. Sea \tilde{Q} el cubo centrado en c_Q con $l(\tilde{Q}) = \sqrt{n}l(Q)$. Descomponemos $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x)$, donde $f_1(x) = f(x)\chi_{4\tilde{Q}}(x)$, $f_2(x) = f(x)\chi_{\mathbb{R}^n \setminus \frac{4}{l(\tilde{Q})^a}\tilde{Q}}(x)$ y $f_3(x) = f(x)\chi_{\frac{4}{l(\tilde{Q})^a}\tilde{Q} \setminus 4\tilde{Q}}(x)$. Por linealidad, demostraremos que (4.4) se cumple para cada una de las funciones recién definidas.

Comencemos con la estimación de f_1 . Aplicando la **desigualdad de Jensen**, se tiene que

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q |K_a * f_1(x) - (K_a * f_1)_Q| dx \lesssim \frac{1}{|Q|} \int_Q |K_a * f_1(x)| dx \leq \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |K_a * f_1(x)|^s dx \right)^{\frac{1}{s}}.$$

Debido al **tipo fuerte (p, p) del operador $K_a * f$** para $1 < p < \infty$,

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |K_a * f_1(x)|^s dx \right)^{\frac{1}{s}} \lesssim \left(\frac{1}{|Q|} \int_{\mathbb{R}^n} |f_1(x)|^s dx \right)^{\frac{1}{s}} \approx \left(\frac{1}{|4\tilde{Q}|} \int_{4\tilde{Q}} \left| \frac{f(x)}{w(x)} \right|^s w(x)^s dx \right)^{\frac{1}{s}}.$$

Luego, dado que $\frac{f}{w} \in L^\infty$ y $w \in RH_s$, obtenemos

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q |K_a * f_1(x) - (K_a * f_1)_Q| dx \lesssim \left(\frac{1}{|4\tilde{Q}|} \int_{4\tilde{Q}} w(x) dx \right) \left\| \frac{f}{w} \right\|_{L^\infty}.$$

Más aún, considerando que $Q \subseteq 4\tilde{Q}$ y $w \in A_1$, está claro que

$$\frac{1}{|4\tilde{Q}|} \int_{4\tilde{Q}} w(x) dx \lesssim \inf_{4\tilde{Q}} w(x) \lesssim \inf_Q w(x) \lesssim \frac{1}{|Q|} \int_Q w(x) dx. \quad (4.5)$$

Por lo tanto,

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q |K_a * f_1(x) - (K_a * f_1)_Q| dx \lesssim \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w(x) dx \right) \left\| \frac{f}{w} \right\|_{L^\infty}.$$

Ahora, veamos que (4.4) se cumple para f_2 . Notemos que, si $\frac{f}{w} \in L^\infty$ y $w \in A_1$, entonces

$$|K_a * f_2(c_Q)| \lesssim \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f_2(x)|}{|c_Q - x|^n} \chi_{\{|c_Q - x| \leq 1\}}(c_Q - x) dx \lesssim \left(\frac{1}{|\frac{4}{l(\tilde{Q})^a} \tilde{Q}|} \int_{\{|c_Q - x| \leq 1\}} w(x) dx \right) \left\| \frac{f}{w} \right\|_{L^\infty},$$

que es una cantidad finita. Sea $\lambda = K_a * f_2(c_Q)$. En consecuencia,

$$\begin{aligned} \frac{1}{|Q|} \int_Q |K_a * f_2(x) - (K_a * f_2)_Q| dx &\lesssim \frac{1}{|Q|} \int_Q |K_a * f_2(x) - \lambda| dx \\ &\lesssim \frac{1}{|Q|} \int_Q \int_{\mathbb{R}^n \setminus \frac{4}{l(\tilde{Q})^a} \tilde{Q}} |K_a(x-y) - K_a(c_Q-y)| |f(y)| dy dx. \end{aligned}$$

En virtud de la Proposición 1.1, se tiene que $|c_Q - y| \geq 2l(\tilde{Q})^{1-a} \geq 2|c_Q - x|^{1-a}$. De este modo,

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus \frac{4}{l(\tilde{Q})^a} \tilde{Q}} |K_a(x-y) - K_a(c_Q-y)| |f(y)| dy \leq \int_{\{|c_Q - y| \geq 2|c_Q - x|^{1-a}\}} |K_a(x-y) - K_a(c_Q-y)| |f(y)| dy.$$

Teniendo en cuenta que $\frac{f}{w} \in L^\infty$, aplicando el Lema 4.1 y dado que $w \in A_1$, obtenemos

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q |K_a * f_2(x) - (K_a * f_2)_Q| dx \lesssim \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q Mw(x) dx \right) \left\| \frac{f}{w} \right\|_{L^\infty} \lesssim \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w(x) dx \right) \left\| \frac{f}{w} \right\|_{L^\infty}.$$

Para la estimación correspondiente a f_3 , descomponemos

$$\begin{aligned} K_a * f_3(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{K}_{a,s}(x-y) \left(\frac{1}{|x-y|^{n-n(2+a')/s'}} - \frac{1}{|c_Q-y|^{n-n(2+a')/s'}} \right) f_3(y) dy \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{K}_{a,s}(x-y) \frac{f_3(y)}{|c_Q-y|^{n-n(2+a')/s'}} dy \\ &= g(x) + h(x), \end{aligned}$$

donde $\tilde{K}_{a,s}$ es el núcleo definido en el Teorema 3.3 (notemos que, debido a la elección de $s > 1$, la condición $2 + a' < s'$ se cumple). Luego, basta con verificar (4.4) para g y h .

Por definición, se tiene que $2|c_Q - x| \leq l(\tilde{Q}) \leq 2l(\tilde{Q}) \leq |c_Q - y|$. En virtud de la Proposición 2.10, obtenemos

$$\left| \frac{1}{|x-y|^{n-\frac{n(2+a')}{s'}}} - \frac{1}{|c_Q-y|^{n-\frac{n(2+a')}{s'}}} \right| \lesssim \frac{|c_Q-x|}{|c_Q-y|^{(n+1)-\frac{n(2+a')}{s'}}} \lesssim \frac{l(\tilde{Q})}{|c_Q-y|^{(n+1)-\frac{n(2+a')}{s'}}}.$$

Considerando este hecho y procediendo como en (3.7), resulta

$$\begin{aligned} |g(x)| &\lesssim l(\tilde{Q}) \int_{\{|c_Q - y| \geq 2l(\tilde{Q})\}} \left| \frac{f(y)}{w(y)} \right| \frac{w(y)}{|c_Q - y|^{n+1}} dx \\ &\lesssim l(\tilde{Q}) \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_{\{|c_Q - y| \approx 2^k l(\tilde{Q})\}} \frac{w(y)}{|c_Q - y|^{n+1}} dx \right) \left\| \frac{f}{w} \right\|_{\infty} \\ &\lesssim l(\tilde{Q}) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{-k}}{l(\tilde{Q})} \left(\frac{1}{|2^{k+3}\tilde{Q}|} \int_{2^{k+3}\tilde{Q}} w(x) dx \right) \left\| \frac{f}{w} \right\|_{\infty}. \end{aligned}$$

De este modo, (4.4) se obtiene de considerar $Q \subseteq 2^{k+3}\tilde{Q}$ y aplicar la condición A_1 como en (4.5).

Aplicando la **desigualdad de Jensen** para la estimación de h , se tiene que

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q |h(x)| dx \leq \left(\frac{1}{|Q|} \int_{\mathbb{R}^n} \left| \tilde{K}_{a,s} * \left(\frac{f_3(y)}{|c_Q - y|^{n-n(2+a')/s'}} \right) (x) \right|^{s'} dx \right)^{\frac{1}{s'}}.$$

Luego, por el **tipo fuerte** (p, p') del operador $\tilde{K}_{a,p} * f$ para $1 < p < 2$ tal que $2 + a' < p'$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{|Q|} \int_Q |h(x)| dx &\lesssim \frac{1}{|Q|^{\frac{1}{s'}}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f_3(y)|^s}{|c_Q - y|^{n+n(1-s)(1+a')}} dy \right)^{\frac{1}{s}} \\ &\lesssim \frac{1}{|Q|^{\frac{1}{s'}}} \left(\int_{\frac{4}{l(\tilde{Q})^a} \tilde{Q} \setminus 4\tilde{Q}} \left| \frac{f(y)}{w(y)} \right|^s \frac{|w(y)|^s}{|c_Q - y|^{n+n(1-s)(1+a')}} dy \right)^{\frac{1}{s}}. \end{aligned}$$

Dado que $\frac{f}{w} \in L^\infty$ y $l(\tilde{Q}) = \sqrt{n}l(Q)$, procediendo como en (3.8), obtenemos

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q |h(x)| dx \lesssim \frac{1}{|Q|^{\frac{1}{s'}}} \left(\sum_{k=0}^{k_0} |2^k Q|^{(s-1)(1+a')} \frac{1}{|2^{k+3}\tilde{Q}|} \int_{2^{k+3}\tilde{Q}} w(y)^s dy \right)^{\frac{1}{s}} \left\| \frac{f}{w} \right\|_{\infty},$$

donde k_0 es un entero tal que $2^{k_0-1}l(\tilde{Q}) < l(\tilde{Q})^{1-a} \leq 2^{k_0}l(\tilde{Q})$. Teniendo en cuenta que $w \in RH_s$ y $Q \subseteq 2^{k+3}\tilde{Q}$, utilizando la condición A_1 como en (4.5), resulta

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q |h(x)| dx \lesssim \frac{1}{|Q|^{\frac{1}{s'}}} \left(\sum_{k=0}^{k_0} |2^k Q|^{(s-1)(1+a')} \right)^{\frac{1}{s}} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w(y) dy \right) \left\| \frac{f}{w} \right\|_{\infty}.$$

Expandiendo la suma geométrica como en (3.9), es fácil ver que

$$\frac{1}{|Q|^{\frac{1}{s'}}} \left(\sum_{k=0}^{k_0} |2^k Q|^{(s-1)(1+a')} \right)^{\frac{1}{s}} \leq C,$$

donde $C = C(a, n, [w]_{A_1})$ es una constante positiva.

Caso 2. Supongamos que $\sqrt{n}l(Q) > 1$. Sea \tilde{Q} el cubo centrado en c_Q con $l(\tilde{Q}) = \sqrt{n}l(Q)$. Descomponemos $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, donde $f_1(x) = f(x)\chi_{4\tilde{Q}}(x)$ y $f_2(x) = f(x)\chi_{\mathbb{R}^n \setminus 4\tilde{Q}}(x)$. Notemos que la demostración de (4.4) para f_1 ya fue abordada en el caso anterior y es independiente del diámetro de Q . De este modo, solo resta estimar f_2 .

Por definición, está claro que

$$\begin{aligned} \frac{1}{|Q|} \int_Q |K_a * f_2(x) - (K_a * f_2)_Q| dx &\lesssim \frac{1}{|Q|} \int_Q \int_{\mathbb{R}^n \setminus 4\tilde{Q}} |K_a(x-y)| |f(y)| dy dx \\ &\lesssim \frac{1}{|Q|} \int_Q \int_{\mathbb{R}^n \setminus 4\tilde{Q}} \frac{|f(y)|}{|x-y|^n} \chi_{\{|x-y| \leq 1\}} dy dx. \end{aligned}$$

En virtud de la Proposición 1.1, si $x \in Q$ e $y \in \mathbb{R}^n \setminus 4\tilde{Q}$, entonces $|x-y| \geq 2l(\tilde{Q}) > 2$. Luego,

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q |K_a * f_2(x) - (K_a * f_2)_Q| dx = 0. \quad \square$$

Observación 4.7. Sean $0 < a < 1$ y $L_a \in L^1$ la función definida en (2.4). Si $f \in L^\infty$, en virtud de la desigualdad de Young, se tiene que

$$\|L_a * f\|_{L^\infty} \leq \|L_a\|_{L^1} \|f\|_{L^\infty} < \infty.$$

Por lo tanto, la principal razón por la que el operador T_a no es de tipo fuerte (∞, ∞) radica en la singularidad del núcleo K_a .

Sea w un peso tal que $Mw(x) < \infty$ en c.t.p. x . Si $\frac{f}{w} \in L^\infty$ y Q es un cubo de \mathbb{R}^n , entonces

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q |L_a * f(x)| dx \leq \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \int_{\mathbb{R}^n} |L_a(x-y)| w(y) dy dx \right) \left\| \frac{f}{w} \right\|_{L^\infty}.$$

Además, siguiendo la demostración de (2.6), es fácil ver que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |L_a(x-y)| w(y) dy \leq CMw(x),$$

donde $C = C(a, n)$ es una constante positiva. De este modo,

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q |L_a * f(x)| dx \lesssim \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q Mw(x) dx \right) \left\| \frac{f}{w} \right\|_{L^\infty}.$$

En particular, si $w \in A_1$, un razonamiento similar al utilizado en (4.4) permite deducir que $\|L_a * f\|_{BMO(w)} \leq C \left\| \frac{f}{w} \right\|_{L^\infty}$. Luego, la acotación de L^∞ en BMO con pesos en A_1 se obtiene a partir de la caracterización (2.3) y del Teorema 4.2.

Resultados, discusión y conclusiones

En esta tesina, siguiendo los lineamientos de S. Chanillo en [2], estudiamos la acotación en $L^p(w)$ con $1 < p < \infty$ y $w \in A_p$ de los operadores fuertemente singulares paradigmáticos T_a y $K_a * f$. Más aún, a partir de las nociones adquiridas en este estudio, planteamos el problema de acotación $L^\infty - BMO$ con pesos, siendo esta una línea de investigación no explorada.

El Capítulo 1 se centró en sentar las bases para abordar este estudio. Los conceptos presentados aquí fueron tratados en las asignaturas “*Teoría de la Medida (MA068)*”, “*Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales (MA070)*” (en algunos casos por interés personal como parte de los respectivos exámenes finales) y en el seminario de posgrado “*Tópicos de Análisis Armónico y Aplicaciones a Desigualdades Mixtas*”, como parte de la asignatura “*Optativa I (MA095)*”.

En los Capítulos 2 y 3, se recopilaron algunas propiedades fundamentales de estos operadores, estableciendo conexiones con la teoría clásica y nuestros conocimientos previos. En su artículo, Chanillo expone sus resultados para $n = 1$, caso en el que no hay distinción entre bolas y cubos. Por nuestra parte, adaptamos la mayoría de los argumentos al espacio \mathbb{R}^n y desarrollamos con rigor la totalidad de las demostraciones, completando con éxito los comentarios que el autor dejó como ejercicios para el lector.

Finalmente, en el Capítulo 4 establecemos que la condición $w \in A_1$ es suficiente para la acotación $L^\infty - BMO$ con pesos de los operadores T_a y $K_a * f$. El enfoque adoptado se inspira en los casos considerados por J. García-Cuerva et al. en [13], donde se estudian los conmutadores del operador $K_a * f$. También consideramos la descomposición del dominio de f utilizada por L. De-Michele e I. R. Inglis en [8].

En el seminario “*Tópicos de Análisis Armónico y Aplicaciones a Desigualdades Mixtas*”, conocimos el concepto de desigualdades débiles mixtas, estudio iniciado por E. Sawyer en 1985 [23] para el caso del operador maximal de Hardy-Littlewood, y conjeturado en dicho artículo para los operadores de Calderón-Zygmund (OCZs). Este problema fue retomado 20 años después por D. Cruz Uribe et al.

en [6], quienes lograron avances significativos en este ámbito. A día de hoy, se desconocen estimaciones similares para operadores fuertemente singulares. Tras completar los objetivos iniciales de esta tesina, y por interés personal, buscamos referencias sobre trabajos que hayan considerado desigualdades de tipo débil usuales para estos operadores. Como se mencionó previamente, el primer artículo en abordar este problema fue el de C. Fefferman [10], cuyas conclusiones fueron extendidas por P. Sjölin en [24]. La desigualdad de tipo débil $(1, 1)$ con respecto a pesos en A_1 fue establecida por S. Chanillo en [2]. El artículo de Fefferman no difiere significativamente del caso clásico para OCZ, considerando la condición de regularidad enunciada en la Observación 4.4. En determinado momento, Fefferman factoriza el núcleo fuertemente singular en términos de una variante del operador integral fraccionario utilizando el teorema de Plancherel, argumento que no es adecuado para trabajar con pesos. Este inconveniente es sorteado por Chanillo mediante un ingenioso método para localizar los pesos A_1 de forma compatible con la descomposición de Calderón-Zygmund. Sin embargo, una parte crucial del enfoque de Chanillo depende del uso de un operador auxiliar y de un resultado de interpolación en espacios de Hardy, conceptos que no podemos abordar con las herramientas disponibles en esta instancia de grado, pero que considero particularmente interesantes para estudiar en el futuro cercano.

Referencias bibliográficas

- [1] A. P. Calderón and A. Zygmund, *On the existence of certain singular integrals*, Acta Math. **88** (1952), 85–139.
- [2] S. Chanillo, *Weighted norm inequalities for strongly singular convolution operators*, Trans. Amer. Math. Soc. **281** (1984), no. 1, 77–107.
- [3] R. R. Coifman and Y. Meyer, *On commutators of singular integrals and bilinear singular integrals*, Trans. Amer. Math. Soc. **212** (1975), 315–331.
- [4] ———, *Au delà des opérateurs pseudo-différentiels*, Astérisque, vol. 57, Société Mathématique de France, Paris, 1978, With an English summary.
- [5] ———, *Commutateurs d'intégrales singulières et opérateurs multilinéaires*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **28** (1978), no. 3, xi, 177–202.
- [6] D. Cruz-Uribe, J. M. Martell, and C. Pérez, *Weighted weak-type inequalities and a conjecture of Sawyer*, Int. Math. Res. Not. (2005), no. 30, 1849–1871.
- [7] A. Córdoba and C. Fefferman, *A weighted norm inequality for singular integrals*, Studia Math. **57** (1976), no. 1, 97–101.
- [8] L. De-Michele and I. R. Inglis, *L^p estimates for strongly singular integrals on spaces of homogeneous type*, J. Functional Analysis **39** (1980), no. 1, 1–15.
- [9] J. Duoandikoetxea, *Fourier analysis*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 29, American Mathematical Society, Providence, RI, 2001, Translated and revised from the 1995 Spanish original by David Cruz-Uribe.

- [10] C. Fefferman, *Inequalities for strongly singular convolution operators*, Acta Math. **124** (1970), 9–36.
- [11] C. Fefferman and E. M. Stein, *H^p spaces of several variables*, Acta Math. **129** (1972), no. 3-4, 137–193.
- [12] G. B. Folland, *Real analysis*, second ed., Pure and Applied Mathematics (New York), John Wiley & Sons, Inc., New York, 1999, Modern techniques and their applications, A Wiley-Interscience Publication.
- [13] J. García-Cuerva, E. Harboure, C. Segovia, and J. L. Torrea, *Weighted norm inequalities for commutators of strongly singular integrals*, Indiana Univ. Math. J. **40** (1991), no. 4, 1397–1420.
- [14] L. Grafakos, *Classical Fourier analysis*, third ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 249, Springer, New York, 2014.
- [15] ———, *Modern Fourier analysis*, third ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 250, Springer, New York, 2014.
- [16] I. I. Hirschman, Jr., *On multiplier transformations*, Duke Math. J. **26** (1959), 221–242.
- [17] L. Hörmander, *Estimates for translation invariant operators in L^p spaces*, Acta Math. **104** (1960), 93–140.
- [18] D. Mitrea, *Distributions, partial differential equations, and harmonic analysis*, second ed., Universitext, Springer, Cham, 2018.
- [19] B. Muckenhoupt, *Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function*, Trans. Amer. Math. Soc. **165** (1972), 207–226.
- [20] B. Muckenhoupt and R. L. Wheeden, *Weighted norm inequalities for fractional integrals*, Trans. Amer. Math. Soc. **192** (1974), 261–274.
- [21] ———, *Weighted bounded mean oscillation and the Hilbert transform*, Studia Math. **54** (1975/76), no. 3, 221–237.
- [22] W. Rudin, *Real and complex analysis*, third ed., McGraw-Hill Book Co., New York, 1987.

- [23] E. Sawyer, *A weighted weak type inequality for the maximal function*, Proc. Amer. Math. Soc. **93** (1985), no. 4, 610–614.
- [24] P. Sjölin, *L^p estimates for strongly singular convolution operators in \mathbb{R}^n* , Ark. Mat. **14** (1976), no. 1, 59–64.
- [25] E. M. Stein and G. Weiss, *Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces*, Princeton Mathematical Series, No. 32, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1971.
- [26] S. Wainger, *Special trigonometric series in k -dimensions*, Mem. Amer. Math. Soc. **59** (1965), 102.
- [27] A. Zygmund, *Trigonometric series. Vol. I, II*, third ed., Cambridge Mathematical Library, Cambridge University Press, Cambridge, 2002, With a foreword by Robert A. Fefferman.
- [28] J. Álvarez and M. Milman, *H^p continuity properties of Calderón-Zygmund-type operators*, J. Math. Anal. Appl. **118** (1986), no. 1, 63–79.

Índice alfabético

anillo, 5

bola euclídea, 3

constante

A_p , 21

convolución, 8

cubo

n -dimensional, 3

desigualdad

de Chebyshev, 10

de Hölder, 7

de Jensen, 7

de Young, 8

espacio

\mathcal{S} , 16

\mathcal{S}' , 16

BMO , 15

$BMO(w)$, 57

L^1_{loc} , 12

L^∞ , 6

$L^{p,\infty}$, 10

$L^{p,\infty}(w)$, 21

L^p , 6

$L^p(w)$, 20

familia

analítica de operadores, 19

función

de distribución, 9

localmente integrable, 11

lema

de van der Corput, 49

núcleo

$\tilde{K}_{a,p}$, 37

$\tilde{K}_{a,z}^\epsilon$, 44

K_a , 24

operador

$K_a * f$, 26

M , 12

$M^\#$, 15

M_s , 14

$T_{a,z}^\epsilon$, 44

T_a , 27

de tipo débil (p, q) , 11

de tipo fuerte (p, q) , 11

sublineal, 11

peso, [20](#)

A_1 , [21](#)

A_∞ , [21](#)

A_p , [21](#)

RH_s , [22](#)

teorema

de diferenciación de Lebesgue, [12](#)

transformada

de Fourier, [9](#)